

Convolution Back-Projection (CBP) 法による X 線 CT 画像の再構成

version 2 (1998 / 09 / 03, 1999 / 05 / 06)

目次

問題設定

CBP 法の基本式

測定系に関するパラメータおよび測定データ

再構成フィルタ

たたみこみ演算の近似

逆投影の計算

計算の手順 (まとめ)

付録 A. 物体による X 線の吸収

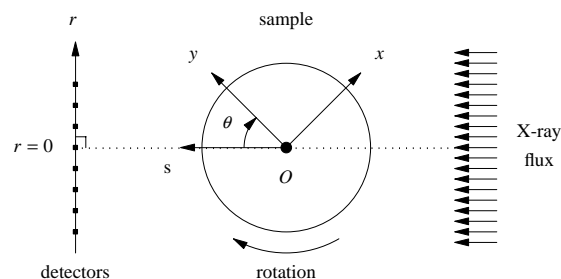
付録 B. CBP 法の基本式の導出

付録 C. サンプル回転のステップ数 M の最適値

付録 D. DFT によるたたみこみ演算

問題設定

- 下図のような配置をした測定系 (X 線 CT スキャナ) を用いて様々な方向からサンプルに単色の X 線 (X 線が単色でない場合の対処法は付録 A を参照のこと) を照射し、サンプルに入射した X 線の強度 (X 線光子の個数) および様々な直線の光路でサンプルを透過した X 線の強度を検出器 (detectors) で計測する。X 線強度から計算した多数の光路についての X 線の投影 (projection) データに CBP 法を適用してサンプル内部の X 線の線吸収係数 (CT 値) の分布を推定し、その画像を再構成する。



- 入射 X 線強度 I_0 は、サンプルを透過しない X 線が直接照射される両端の検出器における測定値を用いる。逆に言うと、サンプルのサイズ (長径) は、サンプルを回転させることも考え合わせて、検出器の配置されている範囲や X 線の光束の幅よりも十分小さい必要がある。

- 透過 X 線強度は X 線がサンプルを通過した光路 (r, θ) ごとの値 $I(r, \theta)$ を測定する。ここで r は X 線の光束 (flux) と直交した直線上に並んだ X 線強度検出器の位置で、各検出器は平行な光路を通してサンプルを透過した X 線を測定する。また θ は X 線をサンプルの周囲の様々な方向から入射・透過させるために行なうサンプルの回転の角度 (位相角) である。後述するように、測定ではサンプルを時計回りに π ラジアンだけ連続的に回転させる必要がある。
- 投影データ $p(r, \theta)$ は、X 線の入射・透過強度のデータから

$$p(r, \theta) = \ln I_0 - \ln I(r, \theta) \quad [1]$$

で計算される。ただし、この計算においては、測定された強度データに含まれる X 線源の揺らぎの影響の除去 (投影においては [1] 式で入射・透過 X 線強度の比をとることで揺らぎの影響は除去されるのでさほど重要ではない?) や個々の検出器のゼロ点・感度の補正などが必要になるが、ここではその詳細は省略する。

- サンプルの回転中心を原点 O としサンプルに固定した (サンプルとともに回転する) 座標系を考え、そこでの座標値 (x, y) で指定した点における CT 値 $f(x, y)$ を CBP 法で求める。ただし、サンプル回転のそれぞれのステップで座標値 (x, y) と光路 (r, θ) は以下の関係式に従うとする (r で位置を示される検出器の並んだ直線が X 線の光束と直交していることに注意)。

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad [2]$$

すなわち、位置 r が 0 の検出器はサンプル回転の位相角 θ によらずサンプルの回転中心を通った X 線の強度を測定する (もしくは、サンプルの回転中心を通った X 線の強度を常に測定する検出器の位置を $r=0$ とする)。また、 θ が 0 のとき y 軸は X 線の光束と平行で、 O から検出器に向かう方向をその正の向きとする。

CBP 法の基本式 (式の導出法の説明は付録 B を参照のこと)

- CBP 法では、投影データ $p(r, \theta)$ から CT 値の分布 $f(x, y)$ を以下の基本式を用いて推定する。

再構成フィルタ (reconstruction filter)

$$g(r) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z) e^{2\pi i z r} dz \quad \text{where } G(z) = |z| \quad [3]$$

たたみこみ演算 (convolution)

$$q(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r - r') p(r', \theta) dr' \quad [4]$$

逆投影 (back-projection)

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad [5]$$

- [5] 式より位相角 θ の関数 $q(r, \theta)$ は $0 \sim \pi$ ラジアン動いたときのそれぞれの θ における値を必要とする。ただし、X 線がある光路を往復するとき往路と復路でサンプルによる吸収は同じ値になるので、透過 X 線強度やそれから計算される諸量は θ に関して周期 π ラジアンの関数になる (後述)。したがって、投影データ $p(r, \theta)$ としてサンプルを適当な初期値 θ_0 から π ラジアンだけ連続的に回転させた位相角 θ それぞれにおける値を測定する必要がある。

測定系に関するパラメータおよび測定データ

- 測定されるのは有限個の光路に対する投影データである。これらを以下の記号で表す。
 - N : 検出器の総数。なお、配置されている位置 r の順番を示す番号 $n = 0, \dots, N - 1$ でそれぞれの検出器を識別する。
 - δ : 隣り合う X 線強度検出器の間隔。ただし、等間隔であると仮定する。なお、後述するように、 δ は再構成画像の空間分解能である（これより小さい距離しか離れていない2点における CT 値を計算しても、それらの値の違いには意味がない）。
 - r_0 : 検出器 0 の位置（普通は $r_0 = -\delta(N - 1)/2$ ）。
 - $r_n = r_0 + \delta n$: 検出器 $n = 0, \dots, N - 1$ の位置。
 - M : サンプルを回転させるステップの総数。なお、CBP 法の式の離散化によって生じる再構成画像のノイズや計算量の増大を押さえるために、 M の値としては

$$M \approx \frac{\pi N}{2} \quad [6]$$

程度の値がよいとされている（詳細は付録 C を参照のこと）。

- θ_0 : サンプルの回転を始める際の初期位相（普通は $\theta_0 = 0$ ）。
- $\theta_m = \theta_0 + \pi m / M$: ステップ $m = 0, \dots, M - 1$ におけるサンプルの回転の位相角。すなわち、サンプル回転のステップごとの角度の刻み幅は π / M ラジアンである。
- $p_{n,m} = p(r_n, \theta_m)$: 光路 (r_n, θ_m) に対して測定された X 線の入射・透過強度から [1] 式（および適当な補正計算）によって求められた投影データ。

再構成フィルタ

- CBP 法では [3] 式に示したような空間周波数 z の関数 $G(z)$ ($= |z|$) のフーリエ逆変換である空間変数 r の関数 $g(r)$ を計算に用いる（付録 B 参照）。
- 等間隔 δ の離散的な点 $r = r_n$ における $p(r, \theta)$ の値だけを用いて [4] 式から $q(r, \theta)$ を計算する場合には、それに必要な $g(r)$ を [3] 式から求める際にサンプリング定理により $G(z)$ に対して以下の制約が課せられる。

$$G(z) = 0 \quad \text{for } |z| > z^* = \frac{1}{2\delta} \quad [7]$$

また、これによって [3] 式の積分範囲は以下ようになる。

$$g(r) = \int_{-z^*}^{z^*} G(z) e^{2\pi i z r} dz \quad [8]$$

- [7] 式に従えば $G(z)$ ($= |z|$) の高周波成分は $|z| = z^*$ において突然切り捨てられる。[8] 式で $G(z)$ から計算する $g(r)$ や [4] 式のたたみこみ演算でそれを用いて計算する $q(r, \theta)$ にこのような切り捨てによる悪影響が生じる可能性がある。それを防ぐために、[7] 式に示された $G(z)$ が 0 でない空間周波数 z の範囲 $|z| \leq z^*$ を考慮したウィンドウ補正を行なう。具体的には、以下のような z のウィンドウ（関数） $W(z)$ をもとの $G(z)$ ($= |z|$) に掛け合わせて、それを [8] 式の $G(z)$ として用いる。

Ramachandran フィルタ（箱型関数で補正）

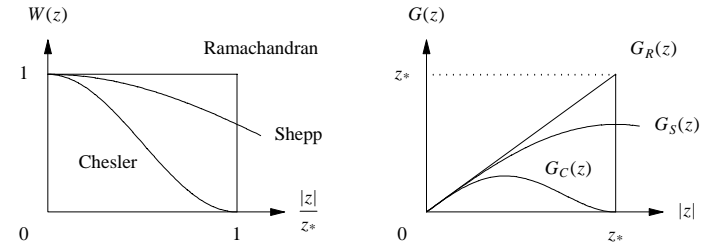
$$W(z) = \begin{cases} 1 & \text{when } |z| \leq z^* \\ 0 & \text{when } |z| > z^* \end{cases} \rightarrow G(z) = W(z) |z| = G_R(z) \equiv |z| \quad [9]$$

Shepp フィルタ（sinc 関数型ウィンドウ関数）

$$W(z) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{z^*}\right) / \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{z^*}\right) \right| \rightarrow G(z) = W(z) |z| = G_S(z) \equiv \frac{|\sin(\pi \delta z)|}{\pi \delta} \quad [10]$$

Chesler フィルタ（hanning ウィンドウ）

$$W(z) = \frac{1}{2} \{1 + \cos(\pi \frac{z}{z^*})\} \rightarrow G(z) = W(z) |z| = G_C(z) \equiv \frac{|z|}{2} \{1 + \cos(2\pi \delta z)\} \quad [11]$$



- 上に示したような再構成フィルタの周波数特性に注意せよ。たとえば上の3つは $|z| \leq z^*$ において $G_C(z) \leq G_S(z) \leq G_R(z)$ である（等号は $z = 0$ のときのみ）。このため $p(r, \theta)$ の高周波（短波長）の成分は上の順で弱められて $q(r, \theta)$ に反映する。そして画像を再構成すると、この順番で短波長成分がおさえられた CT 値の分布となる。短波長成分が真の CT 値の成分なら上の3つのうちで Chesler フィルタを使うと空間分解能が一番悪くなる。しかし、それがノイズ成分なら、Chesler フィルタによって再構成の過程でノイズを除去できることになる。
- 後述するように、たたみこみ演算の近似では $g(r)$ として離散的な点 $r = \delta k$ における値 g_k だけが必要になる。ここで、

$$g_k = g(\delta k) \quad \text{for } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad [12]$$

- [9]、[10] および [11] 式で示した $G(z)$ をそれぞれ [8] 式に代入し、 $r = \delta k$ の場合について計算すると g_k は以下ようになる。

Ramachandran フィルタ

$$g_k = \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} G_R(z) e^{2\pi i z \delta k} dz = \begin{cases} \frac{1}{4\delta^2} & \text{when } k=0 \\ -\frac{1}{\pi^2 \delta^2 k^2} & \text{when } k = \text{odd number} \\ 0 & \text{when } k = \text{even number} \end{cases} \quad [13]$$

Shepp フィルタ

$$g_k = \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} G_S(z) e^{2\pi i z \delta k} dz = \frac{2}{\pi^2 \delta^2 (1-4k^2)} \quad \text{for } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad [14]$$

Chesler フィルタ

$$g_k = \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} G_C(z) e^{2\pi i z \delta k} dz = \begin{cases} \frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) & \text{when } k=0 \\ \frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right) & \text{when } k=\pm 1 \\ -\frac{k^2+1}{2\pi^2 \delta^2 (k^2-1)^2} & \text{when } k = \text{even number} \\ -\frac{1}{2\pi^2 \delta^2 k^2} & \text{when } k = \text{odd number} \end{cases} \quad [15]$$

たたみこみ演算の近似

- サンプルの回転のそれぞれの位相角 $\theta = \theta_m$ ($m=0, \dots, M-1$) ごとに、離散的な点 (検出器の位置) $r = r_n$ ($n=0, \dots, N-1$) においてのみ与えられた投影データの値 $p(r_n, \theta_m) = p_{n,m}$ から離散的な点 $r = r_j$ における関数 $q(r, \theta_m)$ の値 $q_{j,m}$ だけを計算する。ここで、

$$\left. \begin{aligned} r_j &= r_0 + \delta j \\ q_{j,m} &= q(r_j, \theta_m) \end{aligned} \right\} \quad \text{for } j=0, \dots, N-1 \quad [16]$$

- これ以外の点についても $q(r, \theta_m)$ の値は計算可能だが処理の簡便化のために計算しない。そのため、後述するように逆投影の計算で CT 値を求めることのできる点の範囲が制限される。
- [4] 式の積分を検出器の位置と同じ離散的な点 $r = r_n$ ($n=0, \dots, N-1$) における値の和分で近似し、[16] 式で示した離散的な点での $q(r, \theta_m)$ の値を計算する。すなわち、

$$\begin{aligned} q_{j,m} &\approx \delta \sum_{n=0}^{N-1} g(r_j - r_n) p(r_n, \theta_m) \\ &= \delta \sum_{n=0}^{N-1} g\{\delta(j-n)\} p(r_n, \theta_m) \\ &= \delta \sum_{n=0}^{N-1} g_{j-n} p_{n,m} \quad \text{for } j=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad [17]$$

- [17] 式の計算は N^2 のオーダーの処理時間を要する。たたみこみ演算の近似として [17] 式をそのまま計算してもよいが、これを DFT (Discrete Fourier Transform ; 離散フーリエ変換) を用いた形に書き改め、DFT を FFT (Fast Fourier Transform ; 高速フーリエ変換) を利用して計算

すれば、処理時間は $N \log_2 N$ のオーダーに短縮される。

- [17] 式を DFT を用いた形に書き改める。そのためにそれぞれ g_n と $p_{n,m}$ を用いて定義される以下のような $2N$ 個の要素を持つ g'_n と $p'_{n,m}$ を導入する。

$$g'_n = \begin{cases} g_{n-N} & \text{for } n=0, \dots, 2N-1 \\ 0 & \text{for } n=0, \dots, N-1 \end{cases} \quad [18]$$

$$p'_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{for } n=0, \dots, N-1 \\ p_{n-N,m} & \text{for } n=N, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

- g'_n と $p'_{n,m}$ の DFT である G_l と $P_{l,m}$ は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_l &= \sum_{n=0}^{2N-1} g'_n \exp(-2\pi i \frac{ln}{2N}) \\ P_{l,m} &= \sum_{n=0}^{2N-1} p'_{n,m} \exp(-2\pi i \frac{ln}{2N}) \end{aligned} \right\} \quad \text{for } l=0, \dots, 2N-1 \quad [19]$$

また、 G_l と $P_{l,m}$ の積の逆 DFT (離散フーリエ逆変換) $Q_{j,m}$ は以下ようになる。

$$Q_{j,m} = \sum_{l=0}^{2N-1} G_l P_{l,m} \exp(2\pi i \frac{lj}{2N}) \quad \text{for } j=0, \dots, 2N-1 \quad [20]$$

- [18] および [19] 式を [20] 式に代入して整理すれば、

$$Q_{j,m} = 2N \sum_{n=0}^{N-1} g_{j-n} p_{n,m} \quad \text{for } j=0, \dots, N-1 \quad [21]$$

となることがわかる (詳細は付録 D を参照のこと)。それゆえ、[17] 式は

$$q_{j,m} = \frac{\delta}{2N} Q_{j,m} \quad \text{for } j=0, \dots, N-1 \quad [22]$$

- 検出器の個数 N が 2 のべき乗ならば (このとき $2N$ も 2 のべき乗)、[19] と [20] 式の計算は 2 を基数とする FFT によって高速に行なえる。また、検出器の個数が 2 のべき乗でない場合でも、検出器が存在しない r の位置で投影 $p(r, \theta)$ の値が 0 であると仮定して、もとの投影データに値 0 のデータを付け加えて N を水増しすればよい。

逆投影の計算

- 前述したように X 線がある光路を往復するとき往路と復路でサンプルによる吸収は同じ値になる。それゆえ、サンプルを透過した X 線の強度とそれから計算される投影 $p(r, \theta)$ 、そして投影から計算される $q(r, \theta)$ は光路 (r, θ) と $(-r, \theta + \pi)$ において同じ値となる。したがって、[5] 式の積分範囲は以下のように変更できる。

$$f(x, y) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad [23]$$

- この式の積分をサンプル回転のステップと同じ離散的な点 $\theta = \theta_m$ ($m=0, \dots, M-1$) における値を使って和分近似する。すなわち、

$$f(x, y) \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} q(r_m, \theta_m) \quad \text{where } r_m = x \cos \theta_m + y \sin \theta_m \quad [24]$$

- たたみこみ演算においては [16] 式に示される離散的な点 $r = r_j$ での $q(r, \theta_m)$ の値 $q_{j,m}$ だけを計算した。それゆえ、[24] 式の r_m が r_j の分布範囲を越えるような点 (x, y) については $q(r_m, \theta_m)$ を求めることができない。また、そうでない場合でも、任意の点 (x, y) に対して [24] 式を使うためには r に関する $q(r, \theta_m)$ の補間処理が必要になる。
- まず、 $q(r_m, \theta_m)$ が計算できない (x, y) の範囲について考える。それは [24] 式の r_m が

$$r_m < r_0 \quad \text{or} \quad r_m > r_{N-1} = r_0 + \delta(N-1) \quad [25]$$

となる (x, y) である。

- [24] 式の和分において m のいずれかで [25] 式が満たされるなら、その点 (x, y) では $f(x, y)$ が計算できないとする。逆に、 r_0 が負の値で r_{N-1} が正の値として、

$$R = \min(-r_0, r_{N-1}) \quad [26]$$

で R を定義すると (ただし $\min(\dots)$ は 2 つの引数の小さい方を選ぶ関数)、 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ となる点 (x, y) については [25] 式が常に成り立たず $f(x, y)$ を計算できることになる。

- 以上を考慮して、ここでは以下のように仮定する。

$$f(x, y) \equiv 0 \quad \text{when} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > R \quad [27]$$

- [27] 式に相当しない任意の点 (x, y) における $q(r_m, \theta_m)$ の値の計算法について考える。これは r_j ($j = 0, \dots, N-1$) のうちで r_m に最も近い 2 点における値から線形補間する。すなわち、 r_j のうち r_m に最も近い 2 点を r_{j_m} と $r_{j_m+1} = r_{j_m} + \delta$ として、

$$\begin{aligned} q(r_m, \theta_m) &\approx \frac{1}{\delta} \{ (r_{j_m} + \delta - r_m) q_{j_m, m} + (r_m - r_{j_m}) q_{j_m+1, m} \} \\ &= \left(\frac{r_m - r_0}{\delta} - j_m \right) (q_{j_m+1, m} - q_{j_m, m}) + q_{j_m, m} \end{aligned} \quad [28]$$

j_m は以下のようにして求めることができる。

$$j_m = \text{trunc}\left(\frac{r_m - r_0}{\delta}\right) \quad [29]$$

ここで $\text{trunc}(\dots)$ は引数の少数部を切り捨てて整数を返す関数である。

- 前述したように再構成画像の空間解像度は δ である。また、[26] 式の R は $r_0 = -\delta(N-1)/2$ のとき最大値 $\delta(N-1)/2$ をとる。それゆえ、サイズ $\delta \times \delta$ (正方形) の画素で原点 O を中心とする画像を再構成するなら、[27] 式を考慮した意味のある CT 値を計算できる領域の画素数は最大で $N \times N$ となる。そして、この画像では画素 (h, v) に対して座標 (x, y) を以下のように割り当てればよい。

$$\begin{aligned} x &= \delta \left(\frac{1-N}{2} + h \right) \quad \text{for} \quad h = 0, \dots, N-1 \\ y &= \delta \left(\frac{N-1}{2} - v \right) \quad \text{for} \quad v = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad [30]$$

計算の手順 (まとめ)

- 実際の数値計算を行なう場合にポイントとなることが 3 つある。
- まず第 1 に FFT の利用である。たたみこみ演算の [19] および [20] 式 (DFT および逆 DFT の計算) において、以下のような複素数 X_l のデータから Y_k を高速に計算できる基数 2 (データ

の個数が 2 のべき乗 2^{L+1} 個) のための FFT のサブプログラムを用いる。

$$Y_k = \sum_{l=0}^{2^{L+1}-1} X_l \exp(\pm 2\pi i \frac{k l}{2^{L+1}}) \quad \text{for} \quad k = 0, \dots, 2^{L+1}-1 \quad [31]$$

このために検出器の個数 N 以上の最小の 2^L となる整数 L を探し出す必要がある。また、FFT の計算で N 個以上の投影データ $p_{n,m}$ が必要ときにはそれらの値を 0 とすればよい。

- 第 2 のポイントは、繰り返し使われる関数値を前もって計算しておくことである。これには再構成フィルタや FFT および逆投影で用いる \sin や \cos の値などがあげられる。また、再構成フィルタについては、[13]、[14] および [15] 式で示された g_k を計算しておくだけでなく、[18] および [19] 式を用いて G_l までを前もって計算しておくことよい。
- 最後のポイントは、並列計算機の利用である。たたみこみ演算はそれぞれの $m = 0, \dots, M-1$ ごとに独立に計算することができる。また、逆投影の計算も点 (x, y) ごとに独立である。したがってマルチ CPU の計算機を用いるならこれらの部分を並列に計算させるべきである。
- なお、ベクトルの内積の演算 (ベクトル演算) を高速に行なうハードウェアを備えた計算機を利用する場合は、たたみこみ演算を DFT (FFT) によらずに [17] 式を直接計算する方が高速になる可能性がある。
- 実際の計算機プログラム作成時には以上を考慮する必要があるが、ここでは FFT を利用してたたみこみ演算を行なった場合の CBP 法の計算手続きを書き並べる。

測定系のパラメータおよび測定データの読み込み

$$\begin{aligned} &N, M, \delta, r_0 \quad \text{および} \quad \theta_0 \quad \text{の読み込み} \\ &\text{for } m = 0, \dots, M-1 \\ &\quad \text{for } n = 0, \dots, N-1 \\ &\quad \quad p_{n,m} \quad \text{の読み込み} \end{aligned}$$

FFT の準備

$$N \text{ 以上の最小の } 2^L \text{ となる } L \text{ を探す}$$

再構成フィルタの計算

$$\begin{aligned} &\text{再構成フィルタ } g_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ の値は既知とする} \\ &\text{for } n = 0, \dots, 2^{L+1}-1 \end{aligned}$$

$$g'_n = g_{n-2^L}$$

FFT で以下の G_l ($l = 0, \dots, 2^{L+1}-1$) を計算

$$G_l = \sum_{n=0}^{2^{L+1}-1} g'_n \exp(-2\pi i \frac{l n}{2^{L+1}})$$

たたみこみ演算

$$\begin{aligned} &\text{for } m = 0, \dots, M-1 \\ &\quad \text{for } n = 0, \dots, 2^L-1 \\ &\quad \quad p'_n = 0 \\ &\quad \text{for } n = 2^L, \dots, 2^L + N-1 \\ &\quad \quad p'_n = p_{n-2^L, m} \end{aligned}$$

for $n = 2^L + N, \dots, 2^{L+1} - 1$

$$p'_n = 0$$

FFT で以下の P_l ($l = 0, \dots, 2^{L+1} - 1$) を計算

$$P_l = \sum_{n=0}^{2^{L+1}-1} p'_n \exp(-2\pi i \frac{ln}{2^{L+1}})$$

FFT で以下の Q_j ($j = 0, \dots, 2^{L+1} - 1$) を計算

$$Q_j = \sum_{l=0}^{2^{L+1}-1} G_l P_l \exp(2\pi i \frac{lj}{2^{L+1}})$$

for $j = 0, \dots, N - 1$

$$q_{j,m} = \frac{\delta}{2^{L+1}} Q_j$$

画像再構成可能な領域の計算

$$R = \min \{-r_0, r_0 + \delta(N - 1)\}$$

逆投影の計算 (以下は画素サイズ $\delta \times \delta$ 、画素数 $N \times N$ の再構成画像の場合)

for $h = 0, \dots, N - 1$

for $v = 0, \dots, N - 1$

$$x = \delta \left(\frac{1-N}{2} + h \right)$$

$$y = \delta \left(\frac{N-1}{2} - v \right)$$

if $\sqrt{x^2 + y^2} > R$

$$f(x, y) = 0$$

else

$$f(x, y) \equiv \frac{\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} q(r_m, \theta_m)$$

where

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{\pi m}{M}$$

$$r_m = x \cos \theta_m + y \sin \theta_m$$

$$j_m = \text{trunc} \left(\frac{r_m - r_0}{\delta} \right)$$

$$q(r_m, \theta_m) \equiv \left(\frac{r_m - r_0}{\delta} - j_m \right) (q_{j_m+1, m} - q_{j_m, m}) + q_{j_m, m}$$

付録 A. 物体による X 線の吸収

- 入射強度 (X 線の光子数) I_0 の単色の X 線が厚さ S の均質な物体を透過すると透過強度 I は以下ようになる。

$$I = I_0 e^{-\mu S} \quad [A1]$$

ここで μ は入射した X 線のエネルギー (波長) とそれが透過した物質によって決まる X 線の線吸収係数 (linear absorption coefficient) である。

- X 線の入射強度と透過強度の比の対数は X 線の投影 p と呼ばれていて、[A1] 式より

$$p = \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \ln I_0 - \ln I = \mu S \quad [A2]$$

- 物体が不均質な場合、単色 X 線による投影は光路に沿った線吸収係数の値の線積分になる。

$$p = \int \mu(x, y) ds \quad [A3]$$

ここで $\mu(x, y)$ は X 線の光路上の点 (x, y) における X 線の線吸収係数で、 ds は光路に沿った微小距離を示している ([A2] 式と同様に考えて、光路上のすべての線要素の長さとそのでの線吸収係数の値の積を加え合わせて全体の投影を計算する)。

- X 線が単色でない場合は、均質な物体を透過しても投影 p は [A2] 式のような透過厚 S の 1 次関数ではなくなる。線吸収係数は X 線のエネルギー E の関数なので、入射 X 線に含まれる強度成分 $i_0(E)$ ごとに異なった量の吸収が生じる。そして、全体として I は以下のような X 線エネルギー E に関する積分で表される。

$$I = \int i_0(E) e^{-\mu(E)S} dE \quad \text{where} \quad I_0 = \int i_0(E) dE \quad [A4]$$

- [A4] 式より投影 p を S の関数と見なしたとき、

$$\begin{aligned} p &= \ln I_0 - \ln I = \ln \int i_0(E) dE - \ln \int i_0(E) e^{-\mu(E)S} dE \\ \frac{dp}{dS} &= -\frac{1}{I} \frac{dI}{dS} = \frac{1}{I} \int i_0(E) \mu(E) e^{-\mu(E)S} dE = \mu_1(S) \\ \frac{d^2 p}{dS^2} &= \left(\frac{dp}{dS} \right)^2 - \frac{1}{I} \int i_0(E) \mu^2(E) e^{-\mu(E)S} dE = \mu_1^2(S) - \mu_2(S) = -\sigma^2(S) \end{aligned} \quad [A5]$$

ただし、 $\mu_1(S)$ 、 $\mu_2(S)$ および $\sigma^2(S)$ は、以下のようなパラメータ S を持つ E に関する分布 $D(E; S)$ 上における $\mu(E)$ の 1 次モーメント (平均値)、2 次モーメントおよび分散である。

$$D(E; S) = \frac{1}{I} i_0(E) e^{-\mu(E)S} \quad \text{where} \quad \int D(E; S) dE = 1 \quad [A6]$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(S) &= \int \mu(E) D(E; S) dE \\ \mu_2(S) &= \int \mu^2(E) D(E; S) dE \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma^2(E) = \mu_2(S) - \mu_1^2(S) \quad [A7]$$

- 一般に E に関する分布 $D(E; S)$ が E のデルタ関数でない限り、その上での関数 $\mu(E)$ の分散 $\sigma^2(S)$ は 0 でない正の値となる。すなわち、[A5] 式より X 線が単色でない場合には投影 p の透過厚 S に対する 2 次微分は $d^2 p / dS^2 < 0$ となる。また、 $\mu(E)$ は常に正の値をとるからその平均値 $\mu_1(S)$ は正であり、[A5] 式より $dp / dS > 0$ となる。以上から、X 線が単色でない場合には、均質な物体に対する投影 p は透過厚 S に関して上に凸な単調増加関数となる。
- X 線 CT では [A1] や [A2] 式に示したように投影 p が透過厚 S の線形な関数であること (すなわち線吸収係数 μ は S と無関係であること) を仮定している。ところが、単色でない X 線を用いた場合は p が S に関して上に凸な単調増加関数となるので、その仮定が破れてしまう。すなわち、単色でない X 線が均質な物体の長さ S の部分を透過した場合には、見かけの線吸収係数 $f = p / S$ は S に関して単調減少関数になり (f を S で微分してみればわかる)、短い S ほど高い f の値となる。このため、均質な物体について様々な長さの光路を通った X 線の投影データから線吸収係数の画像を再構成すると、短い光路のデータを用いた点では長い光路のものを用いた点に比べて線吸収係数の値が大きいと計算されてしまう。短い光路のデータを用

いた点は物体の縁辺に位置するため、そこでの見かけの線吸収係数 (CT 値) が高い値に計算されることを指して、このような現象は線硬化 (beam hardening) と呼ばれている。

- 単色でない X 線を用いた X 線 CT では [A4] 式を考慮した画像再構成 (すなわち、エネルギー成分ごとに X 線強度データから計算した投影を用いた画像再構成) を行わない限り線硬化が生じる。しかし、X 線強度のエネルギー分布が離散的であってもこの方法は実用的でない。そこで、簡便な方法として以下のようなものがしばしば用いられる。
- まず、対象とするサンプル (不均質物体) に対して標準物質を決める。これはサンプル中で大きな体積を占める物質でもよいし、また、サンプルを構成する中で中程度の線吸収係数を持つものでもよい (医療用の X 線 CT の場合、標準物質として水が用いられることが多い)。
- 標準物質について透過厚 S に対する投影 p の値を測定する。それによって

$$p = h(S) \quad [A8]$$

もしくは、

$$S = H(p) \quad \text{where} \quad H \equiv h^{-1} \quad [A9]$$

のような関係が得られたとする。ただし、先にも述べたように、 $h(S)$ は S の単調増加関数だから、その逆関数 $H(p)$ は一意的に決まるはずである (医療用の X 線 CT では、 $H(p)$ を p の低次のべき乗の線形和で近似するようである)。

- 以上のような標準サンプルの予備測定の結果を用いて本番のサンプルの測定結果を補正する。サンプルの測定によって得られた投影データ p から [A9] 式で透過厚 S を計算し、それを投影データの代わりに用いて画像再構成を行なう。すなわち、標準物質の値を 1 としたサンプル内部の CT 値の分布を計算する。
- この方法で得られた再構成画像では [A9] 式の使用によって X 線強度のエネルギー分布の影響はある程度緩和される (標準物質についてはその影響は完全に取り除かれる)。また、サンプルを構成する物質の吸収係数の大小関係が使用した X 線のエネルギーの範囲において逆転していなければ、得られた CT 値においても物質ごとの大小関係は保存されるはずである。

付録 B. CBP 法の基本式の導出

- 単色の X 線が光路 (r, θ) を通って不均質な物体を透過したとき、投影 $p(r, \theta)$ は以下のような直線の光路に沿った積分で表すことができる。

$$p(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds \quad [B1]$$

ここで $f(x, y)$ は物体内部の CT 値の分布で、物体に固定された座標 (x, y) と光路 (r, θ) および光路に沿った座標 s の間には以下の関係式が成り立つ (r と s は x と y と同じ原点を持つ直交した 2 軸で、 $\theta = 0$ のときそれぞれ x および y 軸と一致する)。

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad [B2]$$

- $f(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換 $F(t, u)$ を考える。

$$F(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(t x + u y)} dx dy \quad [B3]$$

- $F(z \cos \theta, z \sin \theta)$ について [B2] 式を用いて積分の変数 (x, y) を (r, s) に変換すると、

$$\begin{aligned} F(z \cos \theta, z \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i z (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i z r} dr ds \end{aligned} \quad [B4]$$

- [B1] 式を [B4] 式に代入し、以下のように $P(z, \theta)$ を定義する。

$$P(z, \theta) \equiv F(z \cos \theta, z \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) e^{-2\pi i z r} dr \quad [B5]$$

- $f(x, y)$ の 2 次元フーリエ逆変換は以下のようになる。

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, u) e^{2\pi i(t x + u y)} dt du \quad [B6]$$

- 上の積分を極座標形式で行なう。すなわち、 (t, u) の代わりに

$$\begin{cases} t = z \cos \theta \\ u = z \sin \theta \end{cases} \quad \text{where} \quad \begin{cases} -\infty < z < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad [B7]$$

とした極座標系の座標 (z, θ) を用いると、[B6] 式は以下のようになる。

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z \cos \theta, z \sin \theta) e^{2\pi i z (x \cos \theta + y \sin \theta)} |z| dz d\theta \quad [B8]$$

- [B8] 式の積分を分割し、[B2] および [B5] 式を考慮して書き換えると以下のようになる。

$$q(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z, \theta) |z| e^{2\pi i z r} dz \quad [B9]$$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad [B10]$$

- さて、[B5] 式は関数 $P(z, \theta)$ が関数 $p(r, \theta)$ の空間変数 r に関する (1 次元) フーリエ変換であることを示している。また、

$$G(z) = |z| \quad [B11]$$

と書くことにすると、[B9] 式より関数 $q(r, \theta)$ は空間周波数 z の関数 $P(z, \theta)$ と $G(z)$ を掛け合わせたもののフーリエ逆変換である。

- このような $q(r, \theta)$ は、数学的には $P(z, \theta)$ と $G(z)$ それぞれのフーリエ逆変換のたたみこみ演算によって得られるものと等価である。ここで、[B5] 式より $P(z, \theta)$ のフーリエ逆変換は $p(r, \theta)$ である。また、 $G(z)$ のフーリエ逆変換 $g(r)$ は以下のようになる。

$$g(r) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z) e^{2\pi i z r} dz \quad [B12]$$

これらを用いて、 $q(r, \theta)$ は以下のようなたたみこみ演算で表現できる。

$$q(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r - r') p(r', \theta) dr' \quad [B13]$$

- 以上で導出した [B11]、[B12]、[B13] および [B10] 式が投影 $p(r, \theta)$ を用いて物体内部の CT 値の分布 $f(x, y)$ を求めるための CBP 法の基本式である。

付録 C. サンプル回転のステップ数 M の最適値

- 以下に示したサンプルを回転させるステップの総数 M の最適値の推定法は厳密なものではないが、おおむね正しいと思っている。
- 非常に不均質なサンプルを考える。CT 値はサンプル上の点ごとにまちまちなので透過 X 線強度も光路によって大きく異なる。このようなサンプル上の点の CT 値を δ 程度の空間解像度で再構成するためには、サンプルが 1 ステップだけ回転してもそこを通る光路の透過 X 線強度があまりにかけ離れた位置の X 線強度検出器で測定されてはならない。
- 位相角 θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときサンプル上の点 (x, y) を通る光路のデータを測定する検出器の位置 r の変化量 Δr は [2] 式より以下ようになる。

$$\Delta r \approx \frac{dr}{d\theta} \Delta\theta = (-x \sin \theta + y \cos \theta) \Delta\theta \quad [C1]$$

- θ の変化によって点 (x, y) を通る光路の X 線強度があまりにかけ離れた検出器で測定されないためには、 r の変化量 Δr が δ 程度として

$$\Delta\theta = \frac{\delta}{|-x \sin \theta + y \cos \theta|} \quad [C2]$$

- サンプルを回転するとその縁辺にある点の動きが最も大きい。サンプルの長径は最大で検出器の配置されている範囲の幅 $\delta(N-1)$ 程度であるから、[C2] 式の右辺の分母は最大でその半分程度の値 $\delta N/2$ をとる。それゆえ、サンプルの縁辺の点をあまりにかけ離れた検出器で測定しないための $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta \approx \frac{\delta}{\delta N/2} = \frac{2}{N} \quad [C3]$$

- $\Delta\theta = \pi/M$ とすると、

$$M \approx \frac{\pi N}{2} \quad [C4]$$

付録 D. DFT によるたたみこみ演算

- ここでは、[18]、[19] および [20] 式で DFT を用いて計算した $Q_{j,m}$ ($j=0, \dots, 2N-1$) が、[21] 式を満たすことを証明する。
- いま [19] 式を [20] 式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} Q_{j,m} &= \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} g'_k p'_{n,m} \exp(-2\pi i \frac{lk}{2N}) \exp(-2\pi i \frac{ln}{2N}) \exp(2\pi i \frac{lj}{2N}) \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} g'_k p'_{n,m} \sum_{l=0}^{2N-1} \exp\{2\pi i \frac{l(j-k-n)}{2N}\} \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} g'_k p'_{n,m} E_{j-k-n} \end{aligned} \quad [D1]$$

ただし、

$$E_{j-k-n} = \sum_{l=0}^{2N-1} \epsilon_{j-k-n}^l \quad \text{where} \quad \epsilon_{j-k-n} = \exp(2\pi i \frac{j-k-n}{2N}) \quad [D2]$$

- [D2] 式は等比級数の和なので容易に計算できて以下ようになる。

$$E_{j-k-n} = \begin{cases} 2N & \text{if } \epsilon_{j-k-n} = 1 \\ \frac{1 - \epsilon_{j-k-n}^{2N}}{1 - \epsilon_{j-k-n}} & \text{if } \epsilon_{j-k-n} \neq 1 \end{cases} \quad [D3]$$

- ここで [D2] 式より $\epsilon_{j-k-n}^{2N} = 1$ なので、 $\epsilon_{j-k-n} \neq 1$ のとき $E_{j-k-n} = 0$ となる。また、[D1] 式より $-2(2N-1) \leq j-k-n \leq 2N-1$ なので、 $\epsilon_{j-k-n} = 1$ となるのは $j-k-n = -2N$ もしくは $j-k-n = 0$ の場合だけである。したがって [D3] 式は以下ようになる。

$$E_{j-k-n} = \begin{cases} 2N & \text{if } k = j-n+2N \text{ or } k = j-n \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad [D4]$$

- [D4] 式を $0 \leq k \leq 2N-1$ であることに注意して [D1] 式に代入すると、

$$Q_{j,m} = 2N \left(\sum_{n=0}^j g'_{j-n} p'_{n,m} + \sum_{n=j+1}^{2N-1} g'_{j-n+2N} p'_{n,m} \right) \quad [D5]$$

- [18] 式で $n=0, \dots, N-1$ のときに $p'_{n,m} = 0$ であることに注意しつつ [D5] 式に [18] 式を代入すると、 $j=0, \dots, N-1$ のとき、

$$\begin{aligned} Q_{j,m} &= 2N \sum_{n=N}^{2N-1} g_{j-n+N} p_{n-N,m} \\ &= 2N \sum_{n=0}^{N-1} g_{j-n} p_{n,m} \quad \text{for } j=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad [D6]$$