

投影値のデータだけを用いた CT 画像の重心とサンプル回転中心の推定

サンプル回転

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

投影値

$$p(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds$$

投影値および CT 値の総和

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) dr = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dr ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

CT 画像の重心

$$\begin{Bmatrix} x_f \\ y_f \end{Bmatrix} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cdot f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy} = \frac{1}{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cdot f(x, y) dx dy$$

投影値の重心

$$\begin{aligned} r_p(\theta) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} r \cdot p(r, \theta) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) dr} = \frac{1}{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot p(r, \theta) dr \\ &= \frac{1}{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot f(x, y) dr ds \\ &= \frac{1}{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta) \cdot f(x, y) dr ds \\ &= \frac{1}{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta) \cdot f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{S} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy \cdot \cos \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy \cdot \sin \theta \right) \\ &= x_f \cdot \cos \theta + y_f \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

投影値の測定データ

$$p_{n, m} = p(r_n, \theta_m) \quad \text{where} \quad \begin{cases} r_n = \delta \cdot (n - C) & \text{for } n = 0, \dots, N-1 \\ \theta_m = \pi \cdot m / M & \text{for } m = 0, \dots, M-1 \end{cases}$$

測定値の総和と 1 次モーメント

$$\begin{Bmatrix} a_m \\ b_m \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} p_{n, m} \\ n \cdot p_{n, m} \end{Bmatrix}$$

積分の和分近似

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta_m) dr &\approx \delta \cdot a_m \\ \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot p(r, \theta_m) dr &\approx \delta \cdot \sum_{n=0}^{N-1} r_n \cdot p_{n, m} = \delta^2 \cdot (b_m - C \cdot a_m) \end{aligned}$$

CT 画像の重心とサンプル回転中心の関係式

$$x_f \cdot \cos \theta_m + y_f \cdot \sin \theta_m = r_p(\theta_m) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} r \cdot p(r, \theta_m) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta_m) dr} \approx \delta \cdot \left(\frac{b_m}{a_m} - C \right)$$

最小自乗法

$$R(x_f, y_f, C) = \sum_{m=0}^{M-1} \left(\frac{x_f}{\delta} \cdot \cos \theta_m + \frac{y_f}{\delta} \cdot \sin \theta_m + C - \frac{b_m}{a_m} \right)^2 \rightarrow \text{minimize}$$