投影値のエネルギースペクトルを用いた CT 画像上の物体像の円近似

CT 測定した物体像

投影値の Fourier 変換

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r) \cdot \exp(\, -2 \cdot \pi \cdot i \cdot z \cdot r \,)\, dr = C_0(z) - i \cdot S_0(z)$$

ただし、以下の関数を導入した。

$$\left.\begin{array}{l} C_j(z) \\ S_j(z) \end{array}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} r^j \cdot p(r) \cdot \left\{\begin{array}{l} \cos(\,2 \cdot \pi \cdot z \cdot r\,) \\ \sin(\,2 \cdot \pi \cdot z \cdot r\,) \end{array}\right\} dr$$

なお、これらの関数に対して以下が成り立つ。

$$C_j(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r^j \cdot p(r)\, dr \quad \leftarrow \quad C_j(0) \text{ は投影値の } j \text{ 次モーメント}$$

$$S_j(0) = 0 \quad \leftarrow \quad S_j(0) \text{ は } j \text{ によらず } 0$$

$$\frac{d}{dz}\left\{\begin{array}{l} C_j(z) \\ S_j(z) \end{array}\right\} = 2 \cdot \pi \cdot \left\{\begin{array}{r} -S_{j+1}(z) \\ C_{j+1}(z) \end{array}\right.$$

$z = 0$ における投影値のエネルギースペクトルの値とその２次までの微分値

$$E(z) = C_0^2(z) + S_0^2(z)$$
$$\to \quad E(0) = C_0^2(0)$$

$$\frac{dE}{dz}(z) = 2 \cdot \left(C_0 \cdot \frac{dC_0}{dz} + S_0 \cdot \frac{dS_0}{dz} \right) = 4 \cdot \pi \cdot (\, -C_0 \cdot S_1 + S_0 \cdot C_1 \,)$$
$$\to \quad \frac{dE}{dz}(0) = 0$$

$$\frac{d^2E}{dz^2}(z) = 4 \cdot \pi \cdot \left(-\frac{dC_0}{dz} \cdot S_1 - C_0 \cdot \frac{dS_1}{dz} + \frac{dS_0}{dz} \cdot C_1 + S_0 \cdot \frac{dC_1}{dz} \right) = 8 \cdot \pi^2 \cdot \left(S_1^2 - C_0 \cdot C_2 + C_1^2 - S_0 \cdot S_2 \right)$$
$$\to \quad \frac{d^2E}{dz^2}(0) = -8 \cdot \pi^2 \cdot \left(C_0(0) \cdot C_2(0) - C_1^2(0) \right) = -8 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{C_2(0)}{C_0(0)} - \left(\frac{C_1(0)}{C_0(0)} \right)^2 \right) \cdot C_0^2(0)$$

CT 画像上の値が μ で半径が R の均質な円形物体

$$F(z) = \mu \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \frac{J_1(\,2 \cdot \pi \cdot R \cdot z\,)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot z} = \mu \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot (\pi \cdot R \cdot z)^2 + \tfrac{1}{12} \cdot (\pi \cdot R \cdot z)^4 + O(z^6) \right)$$

$$E(z) = |\, F(z) \,|^2 = (\, \mu \cdot \pi \cdot R^2 \,)^2 \cdot \left(1 - (\pi \cdot R \cdot z)^2 + \tfrac{5}{12} \cdot (\pi \cdot R \cdot z)^4 + O(z^6) \right)$$
$$\to \quad E(0) = (\, \mu \cdot \pi \cdot R^2 \,)^2$$

$$\frac{dE}{dz}(z) = \cdots = (\, \mu \cdot \pi \cdot R^2 \,)^2 \cdot \left(-2 \cdot (\pi \cdot R)^2 \cdot z + \tfrac{5}{3} \cdot (\pi \cdot R)^4 \cdot z^3 + O(z^5) \right)$$
$$\to \quad \frac{dE}{dz}(0) = 0$$

$$\frac{d^2E}{dz^2}(z) = \cdots = (\, \mu \cdot \pi \cdot R^2 \,)^2 \cdot \left(-2 \cdot (\pi \cdot R)^2 + 5 \cdot (\pi \cdot R)^4 \cdot z^2 + O(z^4) \right)$$
$$\to \quad \frac{d^2E}{dz^2}(0) = (\, \mu \cdot \pi \cdot R^2 \,)^2 \cdot \left(-2 \cdot (\pi \cdot R)^2 \right)$$

これらの $z = 0$ におけるエネルギースペクトルの値とその２次までの微分値のそれぞれが同じ値なら、

$$\mu \cdot \pi \cdot R^2 = C_0(0)$$
$$R^2 = 4 \cdot \left(\frac{C_2(0)}{C_0(0)} - \left(\frac{C_1(0)}{C_0(0)} \right)^2 \right)$$