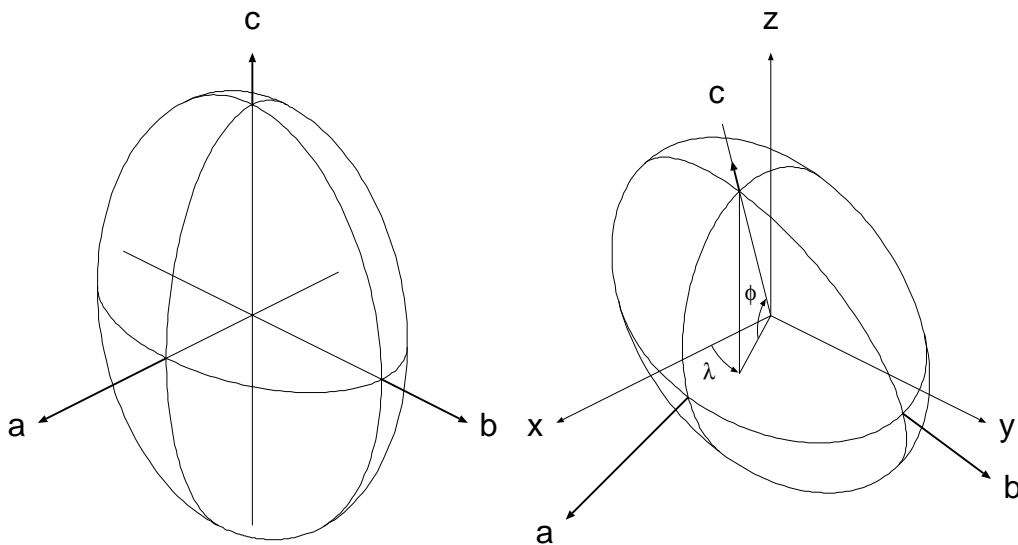


### 3次元画像中の物体像の楕円体近似

- 3次元画像中の物体像と識別された領域を楕円体で近似する。
- 近似楕円体は物体像の領域の体積の重心に中心を置き、相互に直交している3軸（a、b、c軸とする）に沿った半径が異なる値をとる3軸不等楕円体だとする。このような楕円体は中心の座標値、3軸沿いの軸半径A、B、C（ $A \leq B \leq C$ とする）、そして、これらの軸の方向を表す角度 $\lambda$ 、 $\phi$ 、 $\theta$ の合計9個の値によって特定することができる。
- 3次元画像上の位置を示すxyz座標系において近似楕円体の配置は下図のようになっているとする。ただし、近似楕円体のc軸と直交した平面内でのa（もしくはb）軸の方向を表す角度 $\theta$ は下図に示されていない。また、下図では右手系の座標系を採用しているが、角度 $\lambda$ と $\theta$ の回転方向を逆にすれば左手系を考えてもかまわない。以下に記されている楕円体近似の計算式はどちらの座標系に対しても成り立つ。



#### 楕円体

- 原点を中心とする3軸不等楕円体の内部はabc座標系で以下のように表すことができる。

$$(a/A)^2 + (b/B)^2 + (c/C)^2 \leq 1 \quad [1]$$

ついでながら、正規化された動径距離 $r$ と角度 $\alpha$ （経度）および $\beta$ （緯度）を使えば[1]式を以下のように書くこともできる（ $r=1$ の場合が楕円体の表面を表す）。

$$\left. \begin{array}{l} a/A = r \cos \beta \cos \alpha \\ b/B = r \cos \beta \sin \alpha \\ c/C = r \sin \beta \end{array} \right\} \text{ただし、} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ -\pi \leq \alpha \leq \pi \\ -\frac{1}{2}\pi \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi \end{array} \right. \quad [2]$$

- 後の計算に関連した3軸不等楕円体の幾何学量を示す。ただし、以下の体積積分はabc座標系において[1]もしくは[2]式を満たす座標値（ $a, b, c$ ）を積分範囲とする。

$$\text{体積} : V = \int \int \int da db dc = \frac{4}{3} \pi A B C \quad [3]$$

原点のまわりの2次モーメント：

$$M_o = \int \int \int (a^2 + b^2 + c^2) da db dc = \frac{1}{5} V (A^2 + B^2 + C^2) \quad [4]$$

a、b、c 軸それぞれのまわりの 2 次モーメント :

$$\begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \\ M_c \end{Bmatrix} = \iiint \begin{Bmatrix} (b^2 + c^2) \\ (c^2 + a^2) \\ (a^2 + b^2) \end{Bmatrix} da db dc = \frac{1}{5} V \times \begin{Bmatrix} (B^2 + C^2) \\ (C^2 + A^2) \\ (A^2 + B^2) \end{Bmatrix} \quad [5]$$

座標変換

- 楕円体の軸方向を示す abc 座標系と xyz 座標系の関係は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda \Phi \Theta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{もしくは} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \Theta^{-1} \Phi^{-1} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad [6]$$

ここで  $\Lambda$ 、 $\Phi$ 、 $\Theta$  は座標系の回転を表す行列で、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} & \text{かつ} & \Phi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \\ \Theta &= \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Theta^{-1} &= \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [7]$$

また、角度  $\lambda$ 、 $\phi$ 、 $\theta$  は (とりあえず) 以下の範囲の値をとるとする。

$$-\pi \leq \lambda \leq \pi, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi \quad \text{かつ} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad [8]$$

- [6]、[7] 式より xyz 座標系で楕円体の a、b、c 軸方向を表す単位ベクトル  $\vec{e}_a$ 、 $\vec{e}_b$ 、 $\vec{e}_c$  を計算するとそれらの 3 成分の表記は xyz 座標系の値で以下ようになる。

$$\begin{aligned} \vec{e}_a &= \Lambda \Phi \Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \lambda \cos \theta + \cos \lambda \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_b &= \Lambda \Phi \Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \phi \cos \theta \\ \cos \lambda \sin \theta + \sin \lambda \sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_c &= \Lambda \Phi \Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [9]$$

これより、abc と xyz 座標系の位置ベクトルの関係は以下ようになる。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \vec{e}_a + b \vec{e}_b + c \vec{e}_c \quad [10]$$

- 前記の図や単位ベクトル  $\vec{e}_c$  の成分の表記から明らかなように、c 軸の方向は角度  $\lambda$  と  $\phi$  だけで決まる。地球中心から見た地表の点の方向の場合と同様にして、これらの角度を c 軸方向を示す経度 ( $\lambda$ ) と緯度 ( $\phi$ ) だと考えればよい (ただし、前記の図とは逆の左手系の座標系を想定している場合には西経を正とした経度を使う必要がある)。
- $\phi = \frac{1}{2}\pi$  の場合には単位ベクトル  $\vec{e}_c$  が指す c 軸方向は z 軸の方向と一致し、a 軸と b 軸方向をそれぞれ示す  $\vec{e}_a$  と  $\vec{e}_b$  はどちらも xy 平面に平行 (z 成分の値が 0) である。このとき、

$\lambda = \frac{1}{2} \pi$  かつ  $\theta = 0$  ならば a、b 軸はそれぞれ x、y 軸の方向に一致し、また、 $\lambda = \frac{1}{2} \pi$  かつ  $\theta = \frac{1}{2} \pi$  ならば a 軸は +y 方向で b 軸は -x 方向になる。このように、 $\theta$  は c 軸に垂直な平面内の a 軸（もしくは b 軸）の c 軸方向から見た反時計回り（座標系が右手系の場合；左手系なら時計回り）の回転角を表している。

#### 画像（画素）データ

- 3次元画像中の画素（直方体）の3辺の実際の長さをそれぞれ  $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  とし、その体積を  $\Delta \equiv \Delta_x \Delta_y \Delta_z$  と記すことにする。これらの画素のうちで物体像と識別された  $N$  個の画素  $i = 1, \dots, N$  の中央の位置の座標値をそれぞれ  $(X_i, Y_i, Z_i)$  とする。ただし、これらの座標値は実際の長さの単位で測った値（画素の辺の実寸と同じ単位の値）だとする。
- 近似すべき楕円体が物体像の領域の重心を中心とするように、与えられた座標値から物体像の領域の重心の座標値  $\vec{R}_0$  を計算し、それを差し引いた座標値  $\vec{r}_i$  を求めておく。

$$\vec{R}_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} - \vec{R}_0 \quad [11]$$

ただし、 $i = 1, \dots, N$

- 後で必要になる x、y、z 軸のまわりの物体像の2次モーメントを計算しておく。

$$\iiint \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \\ x y \\ y z \\ z x \end{pmatrix} dx dy dz = \Delta \times \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{pmatrix} \quad [12]$$

ただし、上式左辺の体積積分の範囲は物体像の画素が占める領域であり、個々の画素が占める直方体領域ごとに積分した値の総和を考えればよい。すなわち、

$$\int_{x_i - \Delta_x/2}^{x_i + \Delta_x/2} \int_{y_i - \Delta_y/2}^{y_i + \Delta_y/2} \int_{z_i - \Delta_z/2}^{z_i + \Delta_z/2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x y \end{pmatrix} dx dy dz = \Delta \times \begin{pmatrix} x_i^2 + \Delta_x^2/12 \\ x_i y_i \end{pmatrix}$$

などから以下の計算式が得られる。

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^N x_i^2 + N \Delta_x^2 / 12, \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^N y_i^2 + N \Delta_y^2 / 12, \quad S_{zz} = \sum_{i=1}^N z_i^2 + N \Delta_z^2 / 12, \quad [13]$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad S_{yz} = \sum_{i=1}^N y_i z_i \quad \text{および} \quad S_{zx} = \sum_{i=1}^N z_i x_i$$

上記の  $S_{xx}$ 、 $S_{yy}$  および  $S_{zz}$  と  $S_{xy}$ 、 $S_{yz}$  および  $S_{zx}$  の計算式の違いに注意せよ。

- 以前の版の「3次元画像中の物体像の楕円体近似」では [13] 式の  $S_{xx}$ 、 $S_{yy}$  および  $S_{zz}$  の右辺第2項が欠落していた。ただし、実際の3次元画像では x、y、z 方向の画素数が十分大なので物体像の画素の大多数で  $|x_i| \gg \Delta_x$ 、 $|y_i| \gg \Delta_y$ 、 $|z_i| \gg \Delta_z$  が成り立っていると思われる。それゆえ、以前の版にもとづいた計算結果（軸半径や軸方向の推定値）は本文に従った楕円体近似の結果と大きく変わらないはずである。

#### 楕円体近似

- 画像上で物体像と識別した領域の楕円体近似は楕円体の体積  $V$ 、および、[4]、[5] 式に示した原点もしくは a、b、c 軸のまわりの楕円体の2次モーメント  $M_o$ 、 $M_a$ 、 $M_b$ 、 $M_c$  が画像上の物

体像の領域の画素の個数や座標値などから計算した値と等しくなるように行なう。

- ついでながら、以下に記す楕円体近似の計算では [3] 式で示した 3 軸不等楕円体の体積と軸半径の関係式を陽に用いていないので、それによって楕円体近似の結果を評価することができるはずである。
- 物体像の領域の体積と原点のまわりの 2 次モーメントは以下のようなになる。

$$\begin{aligned} V &= \iiint dx dy dz = N \Delta \\ M_o &= \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = L_o \Delta \end{aligned} \quad [14]$$

ただし、

$$L_o = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \quad [15]$$

- [4]、[14] 式より楕円体の軸半径の二乗和  $A^2 + B^2 + C^2$  を以下のように計算できる。

$$A^2 + B^2 + C^2 = 5 M_o / V = 5 L_o / N \quad [16]$$

- 物体像の領域の画素の座標値から [5] 式に示される a、b、c 軸のまわりの 2 次モーメントを計算するためには楕円体の軸方向を示す 3 つの角度  $\lambda$ 、 $\phi$ 、 $\theta$  の値が必要である。

#### c 軸の決定

- 物体像の領域の画素の座標値から c 軸のまわりの 2 次モーメント  $M_c$  を計算する場合には [9]、[10]、[11]、[12]、[13]、[14] 式から 3 つの角度のうち  $\lambda$  と  $\phi$  だけが関係する。

$$\begin{aligned} M_c &= \iiint (a^2 + b^2) da db dc = M_o - \iiint c^2 da db dc = M_o - \iiint (\vec{r} \cdot \vec{e}_c)^2 dx dy dz \\ &= M_o - \iiint \{ (x^2 \cos^2 \lambda + y^2 \sin^2 \lambda + 2 x y \cos \lambda \sin \lambda) \cos^2 \phi - z^2 \sin^2 \phi \\ &\quad - 2 (y z \sin \lambda + z x \cos \lambda) \cos \phi \sin \phi \} dx dy dz \end{aligned} \quad [17]$$

- ここでは  $M_c$  を最小にするように角度  $\lambda$  と  $\phi$  を決める。それは [12]、[13]、[14]、[15] 式より

$$\begin{aligned} L_c &= M_c / \Delta \\ &= L_o - (S_{xx} \cos^2 \lambda + S_{yy} \sin^2 \lambda + 2 S_{xy} \cos \lambda \sin \lambda) \cos^2 \phi - S_{zz} \sin^2 \phi \\ &\quad - 2 (S_{yz} \sin \lambda + S_{zx} \cos \lambda) \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \quad [18]$$

で定義される  $L_c$  を最小にする  $\lambda$  と  $\phi$  を決めることと等価である。

- $L_c$  を最小にする  $\lambda$  と  $\phi$  の探索は simplex 法のような直接法で行なってもよいし、また、 $\partial L_c / \partial \lambda = 0$  および  $\partial L_c / \partial \phi = 0$  から得られる  $\lambda$  と  $\phi$  に関する連立方程式、

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{(S_{xx} - S_{yy}) \sin(2 \lambda) - 2 S_{xy} \cos(2 \lambda)}{2 (S_{yz} \cos \lambda - S_{zx} \sin \lambda)} \\ \tan(2 \phi) &= \frac{4 (S_{yz} \sin \lambda + S_{zx} \cos \lambda)}{S_{xx} + S_{yy} - 2 S_{zz} + (S_{xx} - S_{yy}) \cos(2 \lambda) + 2 S_{xy} \sin(2 \lambda)} \end{aligned} \quad [19]$$

を解くことによって行なってもよい。ただし、後者の場合は  $L_c$  が極値となる複数の  $\lambda$  と  $\phi$  のペアが得られるので、 $L_c$  が最小値であるか否かの判定が必要となる。

- いずれの方法を用いるにせよ c 軸の方向の正負まで決めることはできない。そこで c 軸方向を示す単位ベクトル  $\vec{e}_c$  の z 成分値が負とならない (c 軸が「下向き」にならない) ように角度  $\lambda$  (経度) と  $\phi$  (緯度) をそれぞれ以下の範囲の値だとする。

$$-\pi < \lambda \leq \pi \quad \text{および} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2} \pi \quad [20]$$

- このようにして  $L_c$  を最小にする  $\lambda$  と  $\phi$  が得られたとする。その場合の  $L_c$  の値 ( $L_c$  のうちの最小値であるが以下ではそれを同じ記号で示す) を用いて、[5]、[14]、[18] 式より、

$$A^2 + B^2 = 5 M_c / V = 5 L_c / N \quad [21]$$

これを [16] 式と組み合わせると、以下のように軸半径  $C$  が得られる。

$$C^2 = 5 (L_o - L_c) / N \quad [22]$$

#### a および b 軸の決定

- 上記のようにして c 軸が決定した後には与えられた物体像の画素の座標値などのデータのもとで b 軸のまわりの 2 次モーメント  $M_b$  を最小にする (もしくは a 軸のまわりの 2 次モーメント  $M_a$  を最大にする) ように角度  $\theta$  を決める。
- そのために、最小の  $L_c$  (もしくは  $M_c$ ) となる c 軸の方向を示す角度  $\lambda$  と  $\phi$ 、および、物体像を占める画素の座標値から計算される以下のような  $h$  と  $v$  を定義しておく。

$$\begin{aligned} h &= x \sin \lambda - y \cos \lambda \\ v &= (x \cos \lambda + y \sin \lambda) \sin \phi - z \cos \phi \end{aligned} \quad [23]$$

- これらを用いると  $M_a$  と  $M_b$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} M_a &= \iiint (b^2 + c^2) da db dc = M_o - \iiint a^2 da db dc = M_o - \iiint (\vec{r} \cdot \vec{e}_a)^2 dx dy dz \\ &= M_o - \iiint (h \cos \theta + v \sin \theta)^2 dx dy dz \\ &= M_o - L_{ab}(\theta) \Delta \\ M_b &= \iiint (c^2 + a^2) da db dc = M_o - \iiint b^2 da db dc = M_o - \iiint (\vec{r} \cdot \vec{e}_b)^2 dx dy dz \\ &= M_o - \iiint (-h \sin \theta + v \cos \theta)^2 dx dy dz \\ &= M_o - L_{ab}(\theta \pm \frac{1}{2} \pi) \Delta \end{aligned} \quad [24]$$

ただし、

$$\begin{aligned} L_{ab}(\theta) &= \iiint (h \cos \theta + v \sin \theta)^2 dx dy dz / \Delta \\ &= S_{hh} \cos^2 \theta + S_{vv} \sin^2 \theta + S_{hv} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad [25]$$

また、

$$\begin{aligned} S_{hh} &= \iiint h^2 dx dy dz / \Delta, & \text{かつ} & \quad S_{hv} = \iiint h v dx dy dz / \Delta \\ S_{vv} &= \iiint v^2 dx dy dz / \Delta \end{aligned} \quad [26]$$

なお、[23]、[12]、[13] 式を用いると上式の  $S_{hh}$ 、 $S_{vv}$ 、 $S_{hv}$  を  $S_{xx}$ 、 $S_{yy}$ 、 $S_{zz}$ 、 $S_{xy}$ 、 $S_{yz}$ 、 $S_{zx}$  を使って以下のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} S_{hh} &= S_{xx} \sin^2 \lambda + S_{yy} \cos^2 \lambda - 2 S_{xy} \cos \lambda \sin \lambda \\ S_{vv} &= (S_{xx} \cos^2 \lambda + S_{yy} \sin^2 \lambda + 2 S_{xy} \cos \lambda \sin \lambda) \sin^2 \phi + S_{zz} \cos^2 \phi \\ &\quad - 2 (S_{zx} \cos \lambda + S_{yz} \sin \lambda) \cos \phi \sin \phi \\ S_{hv} &= \{(S_{xx} - S_{yy}) \cos \lambda \sin \lambda - S_{xy} (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda)\} \sin \phi \\ &\quad - (S_{zx} \sin \lambda - S_{yz} \cos \lambda) \cos \phi \end{aligned} \quad [27]$$

- [24]、[25] 式より、 $M_a$  を最大にする  $\theta$  は  $M_b$  を最小にする  $\theta$  と同じ値で、それは  $L_{ab}(\theta)$  を最小にする。そして、 $\partial L_{ab} / \partial \theta = 0$  より、この  $\theta$  は以下の式を満たす。

$$\tan(2\theta) = 2 S_{hv} / (S_{hh} - S_{vv}) \quad [28]$$

- c 軸を決めた場合と同様にして、[28] 式からでは a 軸もしくは b 軸方向の正負を決めることはできない。そこで、 $L_{ab}$  を最小にする  $\theta$  として以下の範囲の値を求める。

$$0 \leq \theta < \pi \quad [29]$$

- [28] 式を解いて  $L_{ab}$  を最小にする  $\theta$  の値が求まったなら、

$$\begin{aligned} L_a &= M_a / \Delta = L_o - L_{ab}(\theta) \\ L_b &= M_b / \Delta = L_o - L_{ab}(\theta \pm \frac{1}{2} \pi) \end{aligned} \quad [30]$$

を計算する。[5]、[14] 式より

$$\begin{aligned} B^2 + C^2 &= 5 M_a / V = 5 L_a / N \\ C^2 + A^2 &= 5 M_b / V = 5 L_b / N \end{aligned} \quad [31]$$

であるから、[16] 式を組み合わせると軸半径  $A$  と  $B$  を計算できる。

$$\begin{aligned} A^2 &= 5 (L_o - L_a) / N \\ B^2 &= 5 (L_o - L_b) / N \end{aligned} \quad [32]$$

付録 : 2次元画像中の物体像の楕円近似

- ab 座標系における楕円の内部の表式

$$(a/A)^2 + (b/B)^2 \leq 1 \quad \text{もしくは} \quad \left. \begin{array}{l} a/A = r \cos \alpha \\ b/B = r \sin \alpha \end{array} \right\} \quad \text{ただし、} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ -\pi \leq \alpha \leq \pi \end{array} \right. \quad [\text{A1}]$$

- 楕円の幾何学量

$$\text{面積 : } V = \iint da db = \pi A B \quad [\text{A2}]$$

a、b 軸のまわりの 2 次モーメント :

$$\left. \begin{array}{l} M_a \\ M_b \end{array} \right\} = \iint \left\{ \begin{array}{l} b^2 \\ a^2 \end{array} \right\} da db = \frac{1}{4} V \times \left\{ \begin{array}{l} B^2 \\ A^2 \end{array} \right. \quad [\text{A3}]$$

- ab 座標系と xy 座標系の関係式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{もしくは} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad [\text{A4}]$$

- それぞれの画素の面積と辺長

$$\Delta \equiv \Delta_x \Delta_y \quad [\text{A5}]$$

- 物体像の重心とそれを原点とする座標値の算出

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} \quad i = 1, \dots, N \quad [\text{A6}]$$

- 物体像を構成するそれぞれの画素における積分値

$$\int_{x_i - \Delta_x / 2}^{x_i + \Delta_x / 2} \int_{y_i - \Delta_y / 2}^{y_i + \Delta_y / 2} \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ y^2 \\ x y \end{array} \right\} dx dy = \Delta \times \left\{ \begin{array}{l} x_i^2 + \Delta_x^2 / 12 \\ y_i^2 + \Delta_y^2 / 12 \\ x_i y_i \end{array} \right. \quad [\text{A7}]$$

- 物体像全体の積分値

$$\iint \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ y^2 \\ x y \end{array} \right\} dx dy = \Delta \times \left\{ \begin{array}{l} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{array} \right\} = \Delta \times \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N x_i^2 + N \Delta_x^2 / 12 \\ \sum_{i=1}^N y_i^2 + N \Delta_y^2 / 12 \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{array} \right. \quad [\text{A8}]$$

- 楕円の面積の近似値

$$V = \iint dx dy = N \Delta \quad [\text{A9}]$$

- 楕円の 2 次モーメントの近似値

$$\begin{aligned} M_a &= \iint (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dx dy = L_{ab}(\theta \pm \frac{1}{2} \pi) \Delta \\ M_b &= \iint (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dx dy = L_{ab}(\theta) \Delta \end{aligned} \quad [\text{A10}]$$

ただし、

$$L_{ab}(\theta) = S_{xx} \cos^2 \theta + S_{yy} \sin^2 \theta + S_{xy} \sin(2\theta) \quad [\text{A11}]$$

- a 軸が短軸となるようにそのまわりの 2 次モーメント  $M_a$  を最大にする  $\theta$  の値を探す。なお、a 軸と b 軸が直交していることを反映して、 $L_{ab}(\theta \pm \frac{1}{2} \pi) \propto M_a$  を最大にする  $\theta$  の値において  $L_{ab}(\theta) \propto M_b$  は自動的に最小になる。それゆえ、これは b 軸が長軸となるように  $M_b$  を最小にする  $\theta$  の値を探すことと等価である。
- $\partial L_{ab} / \partial \theta = 0$  から得た

$$\tan(2\theta) = 2 S_{xy} / (S_{xx} - S_{yy}) \quad [\text{A12}]$$

を満足する  $\theta$  の値を求める。  $\theta$  の範囲を

$$0 \leq \theta < \pi \quad [\text{A13}]$$

とすると 2 個の値が見つかるはずだが、それらのうちで  $L_{ab}(\theta)$  が小さい値 (最小値) になっている方がここで求めている  $\theta$  の値である。

- こうして決めた  $\theta$  の値を用いて、以下の式から楕円の軸半径の近似値を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= 4 M_b / V = 4 L_b / N \\ B^2 &= 4 M_a / V = 4 L_a / N \end{aligned} \right\} \text{ただし、} \begin{cases} L_a = M_a / \Delta = L_{ab}(\theta \pm \frac{1}{2} \pi) \\ L_b = M_b / \Delta = L_{ab}(\theta) \end{cases} \quad [\text{A14}]$$