DFT による 1 次元相互相関の計算法

データ（複素数）

$$\left.\begin{matrix} g_x \\ h_x \end{matrix}\right\} \quad \text{for} \ \ x = 0 \sim N_x - 1$$

ただし、与えられた g_x と h_x の個数が異なる場合は多数の方を N_x とし、未定義のデータの値を 0 として以下の計算を行う。

1 次元相互相関（$1 \le D_x \le N_x$）

$$q_a = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} g_{x+a}\, h_x = \sum_{x=0}^{N_x-1+a} g_x\, h_{x-a} & \text{for} \ \ a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1-a} g_{x+a}\, h_x = \sum_{x=a}^{N_x-1} g_x\, h_{x-a} & \text{for} \ \ a = 0 \sim D_x - 1 \end{cases}$$

計算法

[1] $M_x = N_x + D_x$

[2] $\begin{pmatrix} G_r \\ H_r \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1} \begin{pmatrix} g_x \\ h_x^* \end{pmatrix} \exp\left(-2\,\pi\, i\, \frac{r\, x}{M_x}\right) \quad \text{for} \ \ r = 0 \sim M_x - 1$

[3] $Q_u = \displaystyle\sum_{r=0}^{M_x-1} G_r\, H_r^* \exp\left(2\,\pi\, i\, \frac{u\, r}{M_x}\right) \quad \text{for} \ \ u = 0 \sim M_x - 1$

[4] $q_a = \dfrac{1}{M_x} \times \begin{cases} Q_{M_x+a} & \text{for} \ \ a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ Q_a & \text{for} \ \ a = 0 \sim D_x - 1 \end{cases}$

式 [4] の証明

式 [3] に式 [2] を代入して

$$Q_u = \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_x-1} g_j\, h_k \exp\left(2\,\pi\, i\, r\, \frac{u+k-j}{M_x}\right) = \sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_x-1} g_j\, h_k\, E_{u+k-j} \qquad [5]$$

ただし、E_{u+k-j} を以下のように定義した。

$$E_{u+k-j} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \varepsilon_{u+k-j}^r \quad \text{where} \quad \varepsilon_{u+k-j} = \exp\left(2\,\pi\, i\, \frac{u+k-j}{M_x}\right) \qquad [6]$$

E_{u+k-j} は初項が $\varepsilon_{u+k-j}^0 = 1$、公比が ε_{u+k-j} の等比級数の和なので以下のようになる。

$$E_{u+k-j} = \begin{cases} M_x & \text{when} \ \ \varepsilon_{u+k-j} = 1 \\ \dfrac{1 - \varepsilon_{u+k-j}^{M_x}}{1 - \varepsilon_{u+k-j}} & \text{others} \end{cases}$$

上式の条件式 $\varepsilon_{u+k-j} = 1$ は式 [6] の ε_{u+k-j} の定義より $u + k - j$ が M_x の倍数の場合に成り立つ。一方、$\varepsilon_{u+k-j}^{M_x}$ も式 [6] から $\varepsilon_{u+k-j}^{M_x} = \exp[2\,\pi\, i\,(u + k - j)] = 1$ なので、結局、上式は以下のようになる。

$$E_{u+k-j} = \begin{cases} M_x & \text{when} \ \ u + k - j = 0, \pm M_x, \pm 2\, M_x, \pm 3\, M_x, \cdots \\ 0 & \text{others} \end{cases} \qquad [7]$$

式 [5] と [7] において $u = 0 \sim D_x - 1$ の場合をまず考える。このとき、j や k の値域と式 [1] から $-M_x < -N_x < u + k - j < D_x + N_x = M_x$ なので $u + k - j = 0$（すなわち、$j = u + k$）の場合にのみ E_{u+k-j} は非 0 の値 M_x となる。ただし、j が値域 $0 \sim N_x - 1$ に存在するように $j = u + k$ とする場合の k の値域を $0 \sim N_x - 1 - u$ に限定しなければならない。これらを考慮して式 [5] を整理すると、式 [4] の $a = 0 \sim D_x - 1$ の場合に相当する以下の式が得られる。

$$Q_u = M_x \sum_{k=0}^{N_x-1-u} g_{k+u}\, h_k$$

次に $u = N_x + 1 \sim M_x - 1 = M_x - (D_x - 1) \sim M_x - 1$ の場合を考える。 $0 < u + k - j < M_x + N_x$ なので $u + k - j = M_x$（すなわち、$j = u + k - M_x$）の場合にのみ E_{u+k-j} は非 0 の値 M_x となる。先と同様に $j = u + k - M_x$ が存在する k の値域を考慮して式 [5] を書き換えると、

$$Q_u = M_x \sum_{k=-(u-M_x)}^{N_x-1} g_{k+u-M_x}\, h_k$$

ここで $a = u - M_x = -(D_x - 1) \sim -1$ とすると、式 [4] に相当する式が得られる。

$$Q_{M_x+a} = M_x \sum_{k=-a}^{N_x-1} g_{k+a}\, h_k$$

データが実数の場合

g_x と h_x が実数なら $g_x^* = g_x$ かつ $h_x^* = h_x$ なので、以下の式が成り立つ。

$$\begin{cases} G_{M_x-r}^* = \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1} g_x^* \exp\left[2\pi i \frac{(M_x - r)\, x}{M_x}\right] = \sum_{x=0}^{N_x-1} g_x \exp\left(-2\pi i \frac{r\, x}{M_x}\right) = G_r \\ H_{M_x-r} = \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1} h_x^* \exp\left[-2\pi i \frac{(M_x - r)\, x}{M_x}\right] = \sum_{x=0}^{N_x-1} h_x \exp\left(2\pi i \frac{r\, x}{M_x}\right) = H_r^* \end{cases} \qquad [8]$$

すなわち、 G_r と H_r のうちの独立なものの個数はそれぞれ

$$I_x = \mathrm{trunc}(M_x / 2) + 1 \qquad [9]$$

であり、それらだけから式 [3] を書き換えた以下の式で式 [4] に要する Q_u を計算できる。

$$Q_u = \sum_{r=0}^{I_x-1} G_r\, H_r^* \exp\left(2\pi i \frac{u\, r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x-1} G_{M_x-r}^*\, H_{M_x-r} \exp\left(2\pi i \frac{u\, r}{M_x}\right) \qquad [10]$$

DFT による 1 次元自己相関の計算法

データ（複素数）

$$f_x \quad \text{for} \quad x = 0 \sim N_x - 1$$

1 次元自己相関（$1 \le D_x \le N_x$）

$$p_a = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} f_{x+a}\, f_x = \sum_{x=0}^{N_x-1+a} f_x\, f_{x-a} & \text{for} \quad a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1-a} f_{x+a}\, f_x = \sum_{x=a}^{N_x-1} f_x\, f_{x-a} & \text{for} \quad a = 0 \sim D_x - 1 \end{cases}$$

計算法

[1] $M_x = N_x + D_x$

[2] $F_r = \displaystyle\sum_{x=0}^{N_x-1} f_x \exp\left(-2\,\pi\, i\,\frac{r\,x}{M_x}\right) \quad \text{for} \quad r = 0 \sim M_x$

[3] $P_u = \displaystyle\sum_{r=0}^{M_x-1} F_r\, F_{M_x-r} \exp\left(2\,\pi\, i\,\frac{u\,r}{M_x}\right) \quad \text{for} \quad u = 0 \sim D_x - 1$

[4] $p_a = \dfrac{P_{|a|}}{M_x} \quad \text{for} \quad |a| = 0 \sim D_x - 1$

式 [4] の証明

DFT による 1 次元相互相関の計算法で $g_x = f_x$ とすると $r = 0 \sim M_x - 1$ で $G_r = F_r$ となる。一方、$h_x = f_x$ とすると

$$H_r = \sum_{x=0}^{N_x-1} f_x^* \exp\left(-2\,\pi\, i\,\frac{r\,x}{M_x}\right)$$

となるので、 $r = 0 \sim M_x - 1$ の H_r^* と $r = 1 \sim M_x$ の F_r の間に以下の関係式が成り立つ。

$$H_r^* = \sum_{x=0}^{N_x-1} f_x \exp\left(2\,\pi\, i\,\frac{r\,x}{M_x}\right) = \sum_{x=0}^{N_x-1} f_x \exp\left[-2\,\pi\, i\,\frac{(M_x - r)\,x}{M_x}\right] = F_{M_x-r}$$

これらより 1 次元相互相関の Q_u は式 [3] の P_u と一致し、さらに $a = 0 \sim D_x - 1$ の場合には $Q_u = P_u$ とした q_a は式 [4] の p_a とまったく同じになっている。

次に $a = -(D_x - 1) \sim -1$ の場合を考える。 P_u は $u = 1 \sim M_x - 1$ で以下の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} P_{M_x-u} &= \sum_{r=0}^{M_x-1} F_r\, F_{M_x-r} \exp\left[2\,\pi\, i\,\frac{(M_x - u)\,r}{M_x}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{M_x-1} F_r\, F_{M_x-r} \exp\left[2\,\pi\, i\,\frac{u\,(M_x - r)}{M_x}\right] \\ &= \sum_{r=1}^{M_x} F_{M_x-r}\, F_r \exp\left(2\,\pi\, i\,\frac{u\,r}{M_x}\right) \\ &= F_0\, F_{M_x} + \sum_{r=1}^{M_x-1} F_{M_x-r}\, F_r \exp\left(2\,\pi\, i\,\frac{u\,r}{M_x}\right) = P_u \end{aligned}$$

これより、 $Q_{M_x+a} = P_{M_x+a} = P_{-a}$ なので、この場合も DFT による 1 次元相互相関の計算法で用いていた q_a は式 [4] の p_a とまったく同じになっている。

データが実数の場合

f_x が実数なら $f_x^* = f_x$ なので、式 [2] の F_r は以下の関係式を満たす。

$$F_{M_x - r} = \sum_{x=0}^{N_x - 1} f_x \exp\left[- 2 \pi i \frac{(M_x - r) x}{M_x}\right] = \sum_{x=0}^{N_x - 1} f_x^* \exp\left(2 \pi i \frac{r x}{M_x}\right) = F_r^* \qquad [5]$$

したがって、式 [3] を以下のように書き換えることができる。

$$P_u = \sum_{r=0}^{M_x - 1} F_r F_r^* \exp\left(2 \pi i \frac{u r}{M_x}\right) \qquad [6]$$

また、DFT による 1 次元相互相関の計算法の場合と同様で、式 [5] より F_r のうちの個数

$$I_x = \mathrm{trunc}(M_x / 2) + 1 \qquad [7]$$

のものだけが独立である。すなわち、式 [5] を式 [6] に代入した以下の式を使えば、式 [2] で定義したもののうちの $r = 0 \sim I_x - 1$ の I_x 個だけの F_r から式 [4] に要する $u = 0 \sim D_x - 1$ に対する P_u を計算できる。

$$P_u = \sum_{r=0}^{I_x - 1} F_r F_r^* \exp\left(2 \pi i \frac{u r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x - 1} F_{M_x - r}^* F_{M_x - r} \exp\left(2 \pi i \frac{u r}{M_x}\right) \qquad [8]$$

DFT による２次元相互相関の計算

データ（複素数）

$$\left.\begin{matrix} g_{x,\,y} \\ h_{x,\,y} \end{matrix}\right\} \quad \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} x = 0 \sim N_x - 1 \\ y = 0 \sim N_y - 1 \end{array}\right.$$

ただし、与えられた $g_{x,\,y}$ と $h_{x,\,y}$ の x もしくは y 方向の個数が異なる場合は多数の方をそれぞれ N_x もしくは N_y とし、未定義のデータの値を 0 として以下の計算を行う。

２次元相互相関（$1 \le D_x \le N_x$ かつ $1 \le D_y \le N_y$）

$$q_{a,\,b} = \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1} g_{x+a,\,y+b}\, h_{x,\,y} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \end{array}\right. \\ \displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1} g_{x,\,y+b}\, h_{x-a,\,y} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \end{array}\right. \\ \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1} g_{x+a,\,y}\, h_{x,\,y-b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \end{array}\right. \\ \displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1} g_{x,\,y}\, h_{x-a,\,y-b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

計算法

[1] $$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x + D_x \\ N_y + D_y \end{pmatrix}$$

[2] $$\begin{pmatrix} G_{r,\,s} \\ H_{r,\,s} \end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1}\sum_{y=0}^{N_y-1} \begin{pmatrix} g_{x,\,y} \\ h^*_{x,\,y} \end{pmatrix} \exp\left[-2\,\pi\, i\left(\frac{r\ x}{M_x} + \frac{s\ y}{M_y}\right)\right] \quad \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} r = 0 \sim M_x-1 \\ s = 0 \sim M_y-1 \end{array}\right.$$

[3] $$Q_{u,\,v} = \sum_{r=0}^{M_x-1}\sum_{s=0}^{M_y-1} G_{r,\,s}\, H^*_{r,\,s}\, \exp\left[2\,\pi\, i\left(\frac{u\ r}{M_x} + \frac{v\ s}{M_y}\right)\right] \quad \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} u = 0 \sim M_x-1 \\ v = 0 \sim M_y-1 \end{array}\right.$$

[4] $$q_{a,\,b} = \frac{1}{M_x\ M_y} \times \left\{\begin{array}{ll} Q_{M_x+a,\,M_y+b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \end{array}\right. \\ Q_{a,\,M_y+b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \end{array}\right. \\ Q_{M_x+a,\,b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \end{array}\right. \\ Q_{a,\,b} & \text{for} \ \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

式 [4] の証明

DFT による 1 次元相互相関の計算法を用いると添字 j と k を固定した $g_{x,\,j}$ と $h_{x,\,k}$ の添字 x に関する 1 次元相互相関を以下のようにして計算することができる。

$$\begin{pmatrix} \gamma_r^j \\ \theta_r^k \end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \begin{pmatrix} g_{x,\,j} \\ h^*_{x,\,k} \end{pmatrix} \exp\left(-2\,\pi\, i\ \frac{r\ x}{M_x}\right) \quad \text{for} \ \ r = 0 \sim M_x - 1 \qquad [5]$$

$$\psi_u^{j,\,k} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \gamma_r^j\ (\theta_r^k)^*\ \exp\left(2\,\pi\, i\ \frac{u\ r}{M_x}\right) \quad \text{for} \ \ u = 0 \sim M_x - 1 \qquad [6]$$

$$\begin{cases} \sum_{x=-a}^{N_x-1} g_{x+a,\,j}\ h_{x,\,k} = \dfrac{1}{M_x}\ \psi^{j,\,k}_{M_x+a} & \text{for}\ \ a = -(D_x-1) \sim -1 \\ \sum_{x=a}^{N_x-1} g_{x,\,j}\ h_{x-a,\,k} = \dfrac{1}{M_x}\ \psi^{j,\,k}_{a} & \text{for}\ \ a = 0 \sim D_x - 1 \end{cases} \qquad [7]$$

次に式 [5] の γ^j_r と θ^k_r で添字 j と k をともに y とする。先と同様にして添字 r を固定した γ^y_r と $(\theta^y_r)^*$ の添字 y に関する 1 次元相互相関を以下のようにして計算することができる。

$$\begin{pmatrix} G_{r,\,s} \\ H_{r,\,s} \end{pmatrix} = \sum_{y=0}^{N_y-1} \begin{pmatrix} \gamma^y_r \\ \theta^y_r \end{pmatrix} \exp\left(-2\ \pi\ i\ \frac{s\ y}{M_y}\right) \quad \text{for}\ \ s = 0 \sim M_y - 1 \qquad [8]$$

$$\Psi^r_v = \sum_{s=0}^{M_y-1} G_{r,\,s}\ H^*_{r,\,s}\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{v\ s}{M_y}\right) \quad \text{for}\ \ v = 0 \sim M_y - 1 \qquad [9]$$

$$\begin{cases} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \gamma^{y+b}_r\ (\theta^b_r)^* = \dfrac{1}{M_y}\ \Psi^r_{M_y+b} & \text{for}\ \ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ \sum_{y=b}^{N_y-1} \gamma^y_r\ (\theta^{y-b}_r)^* = \dfrac{1}{M_y}\ \Psi^r_b & \text{for}\ \ b = -0 \sim D_y - 1 \end{cases} \qquad [10]$$

なお、γ^y_r と θ^y_r を式 [5] で定義したもので置換すれば、式 [8] の $G_{r,\,s}$ と $H_{r,\,s}$ が式 [2] のものと一致することは明らかである。

以上の式を使って式 [4] を導出できる。例えば $a = -(D_x - 1) \sim -1$ かつ $b = -(D_y - 1) \sim -1$ の場合を考えると、式 [7] で $j = y + b$ かつ $k = y$ とした式の両辺の $y = -b \sim N_y - 1$ についての和をとり、その結果の右辺を式 [6]、[10]、[9] および [3] で順次置換すればよい。

$$\begin{aligned} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{x=-a}^{N_x-1} g_{x+a,\,y+b}\ h_{x,\,y} &= \frac{1}{M_x} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \psi^{y+b,\,y}_{M_x+a} \\ &= \frac{1}{M_x} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{r=0}^{M_x-1} \gamma^{y+b}_r\ (\theta^y_r)^*\ \exp\left[2\ \pi\ i\ \frac{(M_x+a)\ r}{M_x}\right] \\ &= \frac{1}{M_x\ M_y} \sum_{r=0}^{M_x-1} \Psi^r_{M_y+b}\ \exp\left[2\ \pi\ i\ \frac{(M_x+a)\ r}{M_x}\right] \\ &= \frac{1}{M_x\ M_y} \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} G_{r,\,s}\ H^*_{r,\,s}\ \exp\left\{2\ \pi\ i \left[\frac{(M_y+b)\ s}{M_y} + \frac{(M_x+a)\ r}{M_x}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{M_x\ M_y}\ Q_{M_x+a,\,M_y+b} \end{aligned}$$

これ以外の a と b の値域の場合も上と同様にして式 [4] が成り立つことを証明できる。

データが実数の場合の計算法

[a]　式 [1] と同じ

[b]　$I_x = \mathrm{trunc}(M_x\ /\ 2) + 1$

[c]　$$\begin{pmatrix} G_{r,\,s} \\ H_{r,\,s} \end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} \begin{pmatrix} g_{x,\,y} \\ h_{x,\,y} \end{pmatrix} \exp\left[-2\ \pi\ i \left(\frac{r\ x}{M_x} + \frac{s\ y}{M_y}\right)\right] \quad \text{for} \begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ s = 0 \sim M_y - 1 \end{cases}$$

[d]　$$\Psi^r_v = \sum_{s=0}^{M_y-1} G_{r,\,s}\ H^*_{r,\,s}\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{v\ s}{M_y}\right) \quad \text{for} \begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ v = 0 \sim M_y - 1 \end{cases}$$

[e]　$$Q_{u,\,v} = \sum_{r=0}^{I_x-1} \Psi^r_v\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{u\ r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x-1} (\Psi^{M_x-r}_v)^*\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{u\ r}{M_x}\right) \quad \text{for} \begin{cases} v = 0 \sim M_y - 1 \\ u = 0 \sim M_x - 1 \end{cases}$$

[f]　式 [4] と同じ

式 [e] と [3] の等価性の証明

データ $g_{x,y}$ と $h_{x,y}$ がともに実数なら $g^*_{x,y} = g_{x,y}$ かつ $h^*_{x,y} = h_{x,y}$ なので、 $r = I_x \sim M_x - 1$ の場合に式 [5] で添字 j と k をともに y とした γ^y_r と θ^y_r は以下の関係式を満たす。

$$\begin{pmatrix}\gamma^y_r\\ \theta^y_r\end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1}\begin{pmatrix}g_{x,y}\\ h_{x,y}\end{pmatrix}\exp\left(-2\pi i\,\frac{r\,x}{M_x}\right) = \sum_{x=0}^{N_x-1}\begin{pmatrix}g^*_{x,y}\\ h^*_{x,y}\end{pmatrix}\exp\left[2\pi i\,\frac{(M_x-r)\,x}{M_x}\right] = \begin{pmatrix}(\gamma^y_{M_x-r})^*\\ (\theta^y_{M_x-r})^*\end{pmatrix}$$

これらを式 [8] に適用すると、$r = I_x \sim M_x - 1$ の場合に式 [c] の $G_{r,s}$ と $H_{r,s}$ が以下の関係式を満たすことがわかる。

$$\begin{pmatrix}G_{r,0}\\ H_{r,0}\end{pmatrix} = \sum_{y=0}^{N_y-1}\begin{pmatrix}(\gamma^y_{M_x-r})^*\\ (\theta^y_{M_x-r})^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}G^*_{M_x-r,0}\\ H^*_{M_x-r,0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}G_{r,s}\\ H_{r,s}\end{pmatrix} = \sum_{y=0}^{N_y-1}\begin{pmatrix}(\gamma^y_{M_x-r})^*\\ (\theta^y_{M_x-r})^*\end{pmatrix}\exp\left[2\pi i\,\frac{(M_y-s)\,y}{M_y}\right] = \begin{pmatrix}G^*_{M_x-r,M_y-s}\\ H^*_{M_x-r,M_y-s}\end{pmatrix} \quad \text{for}\ \ s = 1 \sim M_y - 1$$

これらを式 [d] の Ψ^r_v の計算に用いると、 $r = I_x \sim M_x - 1$ の場合に以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\Psi^r_v &= G_{r,0}\,H^*_{r,0} + \sum_{s=1}^{M_y-1} G_{r,s}\,H^*_{r,s}\,\exp\left(2\pi i\,\frac{v\,s}{M_y}\right)\\
&= G^*_{M_x-r,0}\,H_{M_x-r,0} + \sum_{s=1}^{M_y-1} G^*_{M_x-r,M_y-s}\,H_{M_x-r,M_y-s}\,\exp\left(2\pi i\,\frac{v\,s}{M_y}\right)\\
&= G^*_{M_x-r,0}\,H_{M_x-r,0} + \sum_{s=1}^{M_y-1} G^*_{M_x-r,s}\,H_{M_x-r,s}\,\exp\left[2\pi i\,\frac{v\,(M_y-s)}{M_y}\right]\\
&= \sum_{s=0}^{M_y-1} G^*_{M_x-r,s}\,H_{M_x-r,s}\,\exp\left(-2\pi i\,\frac{v\,s}{M_y}\right) = (\Psi^{M_x-r}_v)^*
\end{aligned}$$

この関係式を式 [e] に用いると、式 [3] と同じ $Q_{u,v}$ の表記が得られる。

DFT による２次元自己相関の計算

データ（複素数）

$$f_{x,\,y} \quad \text{for} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \sim N_x - 1 \\ y = 0 \sim N_y - 1 \end{array} \right.$$

２次元自己相関（$1 \le D_x \le N_x$ かつ $1 \le D_y \le N_y$）

$$p_{a,\,b} = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} f_{x+a,\,y+b}\; f_{x,\,y} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \end{array} \right. \\ \displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} f_{x,\,y+b}\; f_{x-a,\,y} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \sim D_x - 1 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \end{array} \right. \\ \displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} f_{x+a,\,y}\; f_{x,\,y-b} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \end{array} \right. \\ \displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} f_{x,\,y}\; f_{x-a,\,y-b} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \sim D_x - 1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

計算法

[1] $$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x + D_x \\ N_y + D_y \end{pmatrix}$$

[2] $$F_{r,\,s} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f_{x,\,y} \exp\left[-2\,\pi\,i \left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} \right) \right] \quad \text{for} \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \sim M_x \\ s = 0 \sim M_y \end{array} \right.$$

[3] $$P_{u,\,v} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\, F_{M_x-r,\,M_y-s} \exp\left[2\,\pi\,i \left(\frac{u\,r}{M_x} + \frac{v\,s}{M_y} \right) \right] \quad \text{for} \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \sim M_x - 1 \\ v = 0 \sim D_y - 1 \end{array} \right.$$

[4] $$p_{a,\,b} = \frac{1}{M_x\, M_y} \times \left\{ \begin{array}{ll} P_{|a|,\,|b|} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = -(D_x - 1) \sim 0 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \end{array} \right. \\ P_{M_x-a,\,|b|} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \sim D_x - 1 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \end{array} \right. \\ P_{M_x-|a|,\,b} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \end{array} \right. \\ P_{a,\,b} & \text{for} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \sim D_x - 1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

式 [4] の証明

DFT による 2 次元相互相関の計算法で $g_{x,\,y} = f_{x,\,y}$ とすると式 [2] から $r = 0 \sim M_x - 1$ かつ $s = 0 \sim M_y - 1$ に対して $G_{r,\,s} = F_{r,\,s}$ となる。一方、 $h_{x,\,y} = f_{x,\,y}$ とすると

$$H_{r,\,s} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f^*_{x,\,y} \exp\left[-2\,\pi\,i \left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} \right) \right]$$

となるので、 $r = 0 \sim M_x - 1$ かつ $s = 0 \sim M_y - 1$ の $H^*_{r,\,s}$ と $r = 1 \sim M_x$ かつ $s = 1 \sim M_y$ の $F_{r,\,s}$ の間に以下の関係式が成り立つ。

$$H^*_{r,\,s} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f_{x,\,y} \exp\left[2\,\pi\,i \left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} \right) \right]$$

$$= \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f_{x,\,y} \exp\left\{-2\,\pi\,i\left[\frac{(M_x - r)\,x}{M_x} + \frac{(M_y - s)\,y}{M_y}\right]\right\} = F_{M_x - r,\, M_y - s}$$

このような $F_{r,\,s}$ で表した $G_{r,\,s}$ と $H^*_{r,\,s}$ を DFT による 2 次元相互相関の計算法の $Q_{u,\,v}$ に代入すれば式 [3] の $P_{u,\,v}$ が得られる。そして、 $b = 0 \sim D_y - 1$ の場合には $a = -(D_x - 1) \sim D_x - 1$ のすべてに対する $q_{a,\,b}$ が式 [4] の $p_{a,\,b}$ と一致している。

次に $b = -(D_y - 1) \sim -1$ の場合を考える。式 [2] の定義から $F_{0,\,s} = F_{M_x,\,s}$ かつ $F_{r,\,0} = F_{r,\,M_y}$ となることを考慮すると、式 [3] の $P_{u,v}$ は $u = 1 \sim M_x - 1$ かつ $v = 1 \sim M_y - 1$ において以下の関係式を満たす。

$$P_{0,\,M_y - v} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\,F_{M_x - r,\,M_y - s} \exp\left[2\,\pi\,i\,\frac{(M_y - v)\,s}{M_y}\right]$$
$$= \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\,F_{M_x - r,\,M_y - s} \exp\left[2\,\pi\,i\,\frac{v\,(M_y - s)}{M_y}\right]$$
$$= \sum_{r=1}^{M_x} \sum_{s=1}^{M_y} F_{M_x - r,\,M_y - s}\,F_{r,\,s} \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{v\,s}{M_y}\right) = P_{0,\,v} \qquad [5]$$

$$P_{M_x - u,\,M_y - v} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\,F_{M_x - r,\,M_y - s} \exp\left\{2\,\pi\,i\left[\frac{(M_x - u)\,r}{M_x} + \frac{(M_y - v)\,s}{M_y}\right]\right\}$$
$$= \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\,F_{M_x - r,\,M_y - s} \exp\left\{2\,\pi\,i\left[\frac{u\,(M_x - r)}{M_x} + \frac{v\,(M_y - s)}{M_y}\right]\right\}$$
$$= \sum_{r=1}^{M_x} \sum_{s=1}^{M_y} F_{M_x - r,\,M_y - s}\,F_{r,\,s} \exp\left[2\,\pi\,i\left(\frac{u\,r}{M_x} + \frac{v\,s}{M_y}\right)\right] = P_{u,\,v} \qquad [6]$$

まず $a = 0$ の場合を考える。 DFT による 2 次元相互相関の計算法では $q_{0,\,b}$ の計算に $Q_{0,\,M_y + b} = P_{0,\,M_y - |b|}$ が使われているが、式 [5] より $P_{0,\,M_y - |b|} = P_{0,\,|b|}$ なので、それは式 [4] の $p_{0,\,b}$ の計算で使っているものと同じである。同様にして、 $a = -(D_x - 1) \sim -1$ の場合には $Q_{M_x + a,\,M_y + b} = P_{|a|,\,|b|}$ が、また、$a = 1 \sim D_x - 1$ の場合には $Q_{a,\,M_y + b} = P_{M_x - a,\,|b|}$ が式 [6] から得られ、これらのどちらの場合も式 [4] の $p_{a,\,b}$ で使っている $P_{u,\,v}$ は DFT による 2 次元相互相関の計算法の $q_{a,\,b}$ で使われている $Q_{u,\,v}$ と一致している。

データが実数の場合の計算法

[a]　式 [1] と同じ

[b]　$I_x = \mathrm{trunc}(M_x / 2) + 1$

[c]　$F_{r,\,s} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f_{x,\,y} \exp\left[-2\,\pi\,i\left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y}\right)\right]$ for $\begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ s = 0 \sim M_y - 1 \end{cases}$

[d]　$\Phi^r_v = \sum_{s=0}^{M_y-1} F_{r,\,s}\,F^*_{r,\,s} \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{v\,s}{M_y}\right)$ for $\begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ v = 0 \sim D_y - 1 \end{cases}$

[e]　$P_{u,\,v} = \sum_{r=0}^{I_x-1} \Phi^r_v \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{u\,r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x-1} (\Phi^{M_x - r}_v)^* \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{u\,r}{M_x}\right)$ for $\begin{cases} v = 0 \sim D_y - 1 \\ u = 0 \sim M_x - 1 \end{cases}$

[f]　式 [4] と同じ

式 [e] と [3] の等価性の証明

$f_{x,\,y}$ が実数なら $f^*_{x,\,y} = f_{x,\,y}$ なので、式 [2] の $F_{r,\,s}$ は以下の関係式を満たす。

$$F_{M_x - r,\, M_y - s} = \sum_{x=0}^{N_x - 1} \sum_{y=0}^{N_y - 1} f_{x,\, y} \exp\left[- 2\, \pi\, i\, \frac{(M_x - r)\, x}{M_x} + \frac{(M_y - s)\, y}{M_y}\right] \qquad [g]$$
$$= \sum_{x=0}^{N_x - 1} \sum_{y=0}^{N_y - 1} f^*_{x,\, y} \exp\left[2\, \pi\, i \left(\frac{r\, x}{M_x} + \frac{s\, y}{M_y}\right)\right] = F^*_{r,\, s}$$

したがって、式 [3] の $P_{u,\, v}$ は以下のように書き換えることができる。

$$P_{u,\, v} = \sum_{r=0}^{M_x - 1} \sum_{s=0}^{M_y - 1} F_{r,\, s}\, F^*_{r,\, s} \exp\left[2\, \pi\, i \left(\frac{u\, r}{M_x} + \frac{v\, s}{M_y}\right)\right] \qquad [h]$$

式 [d] の Φ^r_v は式 [h] の一部を取り出したものである。式 [2] の定義から $F_{r,\, 0} = F_{r,\, M_y}$ となることを考慮すると、式 [g] を用いて Φ^r_v に対する以下の関係式を導出できる。

$$\Phi^r_v = \sum_{s=0}^{M_y - 1} F_{r,\, s}\, F^*_{r,\, s} \exp\left(2\, \pi\, i\, \frac{v\, s}{M_y}\right)$$
$$= \sum_{s=0}^{M_y - 1} F^*_{M_x - r,\, M_y - s}\, F_{M_x - r,\, M_y - s} \exp\left(2\, \pi\, i\, \frac{v\, s}{M_y}\right)$$
$$= \sum_{s=1}^{M_y} F^*_{M_x - r,\, s}\, F_{M_x - r,\, s} \exp\left[2\, \pi\, i\, \frac{v\, (M_y - s)}{M_y}\right]$$
$$= \sum_{s=1}^{M_y} F^*_{M_x - r,\, s}\, F_{M_x - r,\, s} \exp\left(- 2\, \pi\, i\, \frac{v\, s}{M_y}\right) = (\Phi^{M_x - r}_v)^*$$

この関係式を式 [e] に用いると、式 [h] と同じ $P_{u,\, v}$ の表記が得られる。

DFT による３次元相互相関の計算

データ（複素数）

$$\left.\begin{matrix} g_{x,\,y,\,z} \\ h_{x,\,y,\,z} \end{matrix}\right\} \quad \text{for} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \sim N_x - 1 \\ y = 0 \sim N_y - 1 \\ z = 0 \sim N_z - 1 \end{array}\right.$$

ただし、与えられた $g_{x,\,y,\,z}$ と $h_{x,\,y,\,z}$ の x、y もしくは z 方向の個数が異なる場合は多数の方をそれぞれ N_x、N_y もしくは N_z とし、未定義のデータ値を 0 として以下の計算を行う。

３次元相互相関（$1 \le D_x \le N_x$、$1 \le D_y \le N_y$ かつ $1 \le D_z \le N_z$）

$$q_{a,\,b,\,c} = \left\{\begin{array}{lll}
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1}\sum_{z=-c}^{N_y-1} g_{x+a,\,y+b,\,z+c}\, h_{x,\,y,\,z} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1}\sum_{z=-c}^{N_y-1} g_{x,\,y+b,\,z+c}\, h_{x-a,\,y,\,z} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1}\sum_{z=-c}^{N_y-1} g_{x+a,\,y,\,z+c}\, h_{x,\,y-b,\,z} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1}\sum_{z=-c}^{N_y-1} g_{x,\,y,\,z+c}\, h_{x-a,\,y-b,\,z} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1}\sum_{z=c}^{N_y-1} g_{x+a,\,y+b,\,z}\, h_{x,\,y,\,z-c} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=-b}^{N_y-1}\sum_{z=c}^{N_y-1} g_{x,\,y+b,\,z}\, h_{x-a,\,y,\,z-c} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1}\sum_{z=c}^{N_y-1} g_{x+a,\,y,\,z}\, h_{x,\,y-b,\,z-c} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{array}\right. \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1}\sum_{y=b}^{N_y-1}\sum_{z=c}^{N_y-1} g_{x,\,y,\,z}\, h_{x-a,\,y-b,\,z-c} & \text{for} & \left\{\begin{array}{l} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

計算法

[1] $$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x + D_x \\ N_y + D_y \\ N_z + D_z \end{pmatrix}$$

[2] $$\begin{pmatrix} G_{r,\,s,\,t} \\ H_{r,\,s,\,t} \end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1}\sum_{y=0}^{N_y-1}\sum_{z=0}^{N_z-1} \begin{pmatrix} g_{x,\,y,\,z} \\ h^*_{x,\,y,\,z} \end{pmatrix} \exp\left[-2\,\pi\,i\left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} + \frac{t\,z}{M_z}\right)\right] \quad \text{for} \quad \left\{\begin{array}{l} r = 0 \sim M_x - 1 \\ s = 0 \sim M_y - 1 \\ t = 0 \sim M_z - 1 \end{array}\right.$$

[3] $$Q_{u,\,v,\,w} = \sum_{r=0}^{M_x-1}\sum_{s=0}^{M_y-1}\sum_{t=0}^{M_z-1} G_{r,\,s,\,t}\, H^*_{r,\,s,\,t} \exp\left[2\,\pi\,i\left(\frac{u\,r}{M_x} + \frac{v\,s}{M_y} + \frac{w\,t}{M_z}\right)\right] \quad \text{for} \quad \left\{\begin{array}{l} u = 0 \sim M_x - 1 \\ v = 0 \sim M_y - 1 \\ w = 0 \sim M_z - 1 \end{array}\right.$$

$$[4]\quad q_{a,\,b,\,c} = \frac{1}{M_x\ M_y\ M_z} \times \begin{cases}
Q_{M_x+a,\,M_y+b,\,M_z+c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
Q_{a,\,M_y+b,\,M_z+c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
Q_{M_x+a,\,b,\,M_z+c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
Q_{a,\,b,\,M_z+c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
Q_{M_x+a,\,M_y+b,\,c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
Q_{a,\,M_y+b,\,c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
Q_{M_x+a,\,b,\,c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
Q_{a,\,b,\,c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases}
\end{cases}$$

データが実数の場合の計算法

[a]　式 [1] と同じ

[b]　$I_x = \mathrm{trunc}(M_x\ /\ 2) + 1$

$$[c]\quad \begin{pmatrix} G_{r,\,s,\,t} \\ H_{r,\,s,\,t} \end{pmatrix} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} \sum_{z=0}^{N_z-1} \begin{pmatrix} g_{x,\,y,\,z} \\ h_{x,\,y,\,z} \end{pmatrix} \exp\left[-2\ \pi\ i \left(\frac{r\ x}{M_x} + \frac{s\ y}{M_y} + \frac{t\ z}{M_z}\right)\right] \quad \text{for } \begin{cases} r = 0 \sim I_x-1 \\ s = 0 \sim M_y-1 \\ t = 0 \sim M_z-1 \end{cases}$$

$$[d]\quad \Psi^r_{v,\,w} = \sum_{s=0}^{M_y-1} \sum_{t=0}^{M_z-1} G_{r,\,s,\,t}\ H^*_{r,\,s,\,t}\ \exp\left[2\ \pi\ i \left(\frac{v\ s}{M_y} + \frac{w\ t}{M_z}\right)\right] \quad \text{for } \begin{cases} r = 0 \sim I_x-1 \\ v = 0 \sim M_y-1 \\ w = 0 \sim M_z-1 \end{cases}$$

$$[e]\quad Q_{u,\,v,\,w} = \sum_{r=0}^{I_x-1} \Psi^r_{v,\,w}\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{u\ r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x-1} (\Psi^{M_x-r}_{v,\,w})^*\ \exp\left(2\ \pi\ i\ \frac{u\ r}{M_x}\right) \quad \text{for } \begin{cases} w = 0 \sim M_z-1 \\ v = 0 \sim M_y-1 \\ u = 0 \sim M_x-1 \end{cases}$$

[f]　式 [4] と同じ

DFT による３次元自己相関の計算

データ（複素数）

$$f_{x,\,y,\,z} \quad \text{for} \begin{cases} x = 0 \sim N_x - 1 \\ y = 0 \sim N_y - 1 \\ z = 0 \sim N_z - 1 \end{cases}$$

３次元自己相関（$1 \le D_x \le N_x$、$1 \le D_y \le N_y$ かつ $1 \le D_z \le N_z$）

$$p_{a,\,b,\,c} = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{z=-c}^{N_y-1} f_{x+a,\,y+b,\,z+c}\ f_{x,\,y,\,z} & \text{for} \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{z=-c}^{N_y-1} f_{x,\,y+b,\,z+c}\ f_{x-a,\,y,\,z} & \text{for} \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} \sum_{z=-c}^{N_y-1} f_{x+a,\,y,\,z+c}\ f_{x,\,y-b,\,z} & \text{for} \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} \sum_{z=-c}^{N_y-1} f_{x,\,y,\,z+c}\ f_{x-a,\,y-b,\,z} & \text{for} \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = -(D_z-1) \sim -1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{z=c}^{N_y-1} f_{x+a,\,y+b,\,z}\ f_{x,\,y,\,z-c} & \text{for} \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=-b}^{N_y-1} \sum_{z=c}^{N_y-1} f_{x,\,y+b,\,z}\ f_{x-a,\,y,\,z-c} & \text{for} \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = -(D_y-1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=-a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} \sum_{z=c}^{N_y-1} f_{x+a,\,y,\,z}\ f_{x,\,y-b,\,z-c} & \text{for} \begin{cases} a = -(D_x-1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases} \\
\displaystyle\sum_{x=a}^{N_x-1} \sum_{y=b}^{N_y-1} \sum_{z=c}^{N_y-1} f_{x,\,y,\,z}\ f_{x-a,\,y-b,\,z-c} & \text{for} \begin{cases} a = 0 \sim D_x-1 \\ b = 0 \sim D_y-1 \\ c = 0 \sim D_z-1 \end{cases}
\end{cases}$$

計算法

[1] $$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x + D_x \\ N_y + D_y \\ N_z + D_z \end{pmatrix}$$

[2] $$F_{r,\,s,\,t} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} \sum_{z=0}^{N_z-1} f_{x,\,y,\,z} \exp\left[-2\,\pi\,i\left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} + \frac{t\,z}{M_z}\right)\right] \quad \text{for} \begin{cases} r = 0 \sim M_x \\ s = 0 \sim M_y \\ t = 0 \sim M_z \end{cases}$$

[3] $$P_{u,\,v,\,w} = \sum_{r=0}^{M_x-1} \sum_{s=0}^{M_y-1} \sum_{t=0}^{M_z-1} F_{r,\,s,\,t}\, F_{M_x-r,\,M_y-s,\,M_z-t} \exp\left[2\,\pi\,i\left(\frac{u\,r}{M_x} + \frac{v\,s}{M_y} + \frac{w\,t}{M_z}\right)\right] \quad \text{for} \begin{cases} u = 0 \sim M_x - 1 \\ v = 0 \sim M_y - 1 \\ w = 0 \sim D_z - 1 \end{cases}$$

$$[4]\quad p_{a,b,c} = \frac{1}{M_x\, M_y\, M_z} \times \begin{cases} P_{|a|,|b|,|c|} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x - 1) \sim 0 \\ b = -(D_y - 1) \sim 0 \\ c = -(D_z - 1) \sim -1 \end{cases} \\ P_{M_x - a, |b|, |c|} & \text{for } \begin{cases} a = 1 \sim D_x - 1 \\ b = -(D_y - 1) \sim 0 \\ c = -(D_z - 1) \sim -1 \end{cases} \\ P_{|a|, M_y - b, |c|} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x - 1) \sim 0 \\ b = 1 \sim D_y - 1 \\ c = -(D_z - 1) \sim -1 \end{cases} \\ P_{M_x - a, M_y - b, |c|} & \text{for } \begin{cases} a = 1 \sim D_x - 1 \\ b = 1 \sim D_y - 1 \\ c = -(D_z - 1) \sim -1 \end{cases} \\ P_{M_x - |a|, M_y - |b|, c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z - 1 \end{cases} \\ P_{a, M_y - |b|, c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x - 1 \\ b = -(D_y - 1) \sim -1 \\ c = 0 \sim D_z - 1 \end{cases} \\ P_{M_x - |a|, b, c} & \text{for } \begin{cases} a = -(D_x - 1) \sim -1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \\ c = 0 \sim D_z - 1 \end{cases} \\ P_{a,b,c} & \text{for } \begin{cases} a = 0 \sim D_x - 1 \\ b = 0 \sim D_y - 1 \\ c = 0 \sim D_z - 1 \end{cases} \end{cases}$$

データが実数の場合の計算法

[a]　式 [1] と同じ

[b]　$I_x = \mathrm{trunc}(M_x / 2) + 1$

$$[c]\quad F_{r,s,t} = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} \sum_{z=0}^{N_z-1} f_{x,y,z} \exp\left[-2\,\pi\, i \left(\frac{r\,x}{M_x} + \frac{s\,y}{M_y} + \frac{t\,z}{M_z}\right)\right] \quad \text{for } \begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ s = 0 \sim M_y - 1 \\ t = 0 \sim M_z - 1 \end{cases}$$

$$[d]\quad \Phi^{r}_{v,w} = \sum_{s=0}^{M_y-1} \sum_{t=0}^{M_z-1} F_{r,s,t}\, F^{*}_{r,s,t} \exp\left[2\,\pi\, i \left(\frac{v\,s}{M_y} + \frac{w\,t}{M_z}\right)\right] \quad \text{for } \begin{cases} r = 0 \sim I_x - 1 \\ v = 0 \sim M_y - 1 \\ w = 0 \sim D_z - 1 \end{cases}$$

$$[e]\quad P_{u,v,w} = \sum_{r=0}^{I_x-1} \Phi^{r}_{v,w} \exp\left(2\,\pi\, i\, \frac{u\,r}{M_x}\right) + \sum_{r=I_x}^{M_x-1} (\Phi^{M_x - r}_{v,w})^{*} \exp\left(2\,\pi\, i\, \frac{u\,r}{M_x}\right) \quad \text{for } \begin{cases} w = 0 \sim D_z - 1 \\ v = 0 \sim M_y - 1 \\ u = 0 \sim M_x - 1 \end{cases}$$

[f]　式 [4] と同じ